UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas
Departamento de Física Teórica II
(Métodos Matemáticos de la Física)

TESIS DOCTORAL

Polinomios ortogonales y sistemas integrables

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Carlos Álvarez Fernández

Director

Manuel Maña Baena

Madrid, 2014

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

TESIS DOCTORAL

Polinomios ortogonales y sistemas integrables

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Carlos Álvarez Fernández

DIRIGIDA POR EL DOCTOR

Manuel Mañas Baena

Departamento de Física Teórica II
(Métodos Matemáticos de la Física)

MADRID 2014

A mis padres y a mi hermano,
sin cuyo apoyo nada de esto habría sido posible.

Agradecimientos

Sería infinita la lista que tendría que elaborar si quisiera recoger aquí los nombres de todas las personas que han contribuido de una forma u otra a la realización de este trabajo. Como ello no es posible, me limitaré a mencionar a aquellos que me vienen a la mente en este momento, sabiendo que serán muchos los omitidos y pidiendo perdón por ello por adelantado.

Podría empezar por hablar de aquellos que me han acompañado en el trabajo de estos últimos años, son los que primero me vienen a la mente, pero sería poco original, así que hablaré de mis profesores. En cierta medida todos, pero los que más merecen estar aquí son aquellos que durante unos años importantes e inolvidables me enseñaron a apreciar e interesarme por las matemáticas y la física, y también a escribir con corrección. Así que ahí van mis agradecimientos para Doña Pura Sotillo, Don Guillermo Gallego, Don Juanjo Echenagusía y el insustituible Don Antonio Monteagudo, al que seguramente le hubiera gustado leer estas líneas. Ellos han sido mis primeros modelos docentes los astros cuya estela intentaré seguir.

También han sido profesores míos muchos de los que hoy son compañeros de departamento, así que mi agradecimiento se extiende al Departamento de Métodos Cuantitativos de la Universidad Pontificia Comillas. A pesar de la diversidad de materias, Antonio Serrano, Inés Portillo, María Josefa Peralta, Lourdes Fernández, Susana Carabias, Elena Jiménez Pulmariño, Enrique Parra, Juan Manuel López Zafra, Francisco Borrás, Carlos Martínez de Ibarreta y Tomás Curto (y alguno que seguro que me olvido) también han contribuido más de lo que creen a mi formación y especialmente a que disfrute enseñando.

Llegados ya al terreno de la física, mi formación no habría sido la misma sin el Departamento de Física Teórica II de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid. Gracias a ellos pude complementar aquello que ya sabía con todas las cosas nuevas que me quedaban por aprender y que aun hoy sigo aprendiendo, así que gracias a Artemio González, Miguel Ángel Rodríguez, Luis Manuel González, David Gómez-Ullate, Luis Martínez, Manuel Mañas, Francisco Guil, Carlos Moreno, Gabriel Álvarez, José Ignacio Aranda, Javier Chinea, Luis Garay, Francisco González, Lorenzo Abellanas, Piergiulio Tempesta y al resto de los miembros que no han sido mis profesores (que pocos me he dejado fuera). No es simplemente lo que he aprendido de vosotros, sino que además me inspiráis cuando tengo que pensar la mejor forma de dar una clase. Haría también muchas menciones a mis profesores de otros departamentos, pero prefiero dejarlo en un "gracias a todos vosotros".

Pasemos ya a quienes me han tenido que aguantar a más o menos distancia durante estos últimos años. Aquí el primero y el que más merece mi agradecimiento ha sido Manuel Mañas. Además de aceptarme como estudiante en unas condiciones que no son nada estándar (comparadas con las de un estudiante a tiempo completo) supongo que consideró que precisamente por eso tendría algo especial que aportar. Le agradezco también su infinita paciencia cuando otras obligaciones me dificultaban tener los cálculos hechos a tiempo. Supongo que si estoy escribiendo esto es que no quedará ya ninguna cuenta por hacer, aunque he disfrutado mucho haciéndolas. El hecho de a la vez "estar" y "no estar" en el departamento no ha hecho las cosas fáciles para nadie, pero creo que no me puedo quejar del resultado, ya que aunque mi tiempo presencial ha sido limitado, este departamento siempre ha tenido un lugar especial en mis ocupaciones y preocupaciones.

No solo ha sido un placer (y un deber a la vez) trabajar con Manuel Mañas, sino también con Ulises Fidalgo, al que agradezco sus aportaciones y sus conversaciones (no sólo sobre matemáticas). Igualmente agradezco a Guillermo López y a Francisco Marcellán el cariño y la buena acogida que nos han dado en la Universidad Carlos III de Madrid, no sólo invitándonos a los congresos y seminarios, sino molestándose en pulir y corregir las ideas de nuestros trabajos.

Llego ya a aquellos con los que he compartido el papel de estudiante de doctorado en esta casa. En primer lugar estarían los antiguos compañeros que ya no siguen por aquí, pero con los que he compartido aulas en la carrera en muchas ocasiones, Héctor, Isaac, Leticia, Berta, Rubén y Álvaro. También han sido compañeros míos (en este caso de Máster) David, (con quien tuve el placer de trabajar) y Jacobo entre otros. Fue un placer compartir con vosotros un año de tan duro e intenso trabajo. Tampoco me olvido de Jenifer, José Carlos, José Luis, Gerardo y Giovanni; me hubiera gustado compartir más tiempo además de unos fugaces saludos cuando nos encontrábamos en el pasillo o en el comedor. A ti Giovanni te agradezco además la buena compañía en los congresos, cafés y paseos, el sentido del humor y la habilidad para tener siempre un punto de vista distinto.

Por último tengo que agradecer a quienes son los primeros, sin los que jamás podría haber realizado esta tesis, mi familia. Ahí están mis primas, mis tíos y mis abuelos, pero tienen un lugar especial mis padres y mi hermano Alberto a los que dedico este trabajo. A vosotros os debo no sólo infinito agradecimiento por vuestra ayuda y apoyo incondicional, sino lo más importante, el fomento de la curiosidad y la inquietud, el hecho de que siendo yo niño abundaran libros de ciencia entre los regalos. Nunca podré agradeceros lo suficiente vuestra educación, pero espero que dedicaros esta obra sirva de compensación. Gracias a todos y perdón a los que he olvidado mencionar aquí.

Abstract

Motivation and objectives

This thesis explores the connections between two classic subjects that have been historically connected to both mathematics and its application to study the behavior of physical systems. These subjects are the theory of integrable systems and the theory of orthogonal polynomials. In particular, we are interested in some properties of the Toda-type integrable systems (the 2D multi-component Toda hierarchy) that are relevant to describe families of orthogonal polynomials and more general objects, like matrix orthogonal polynomials, multiple orthogonal polynomials and orthogonal Laurent polynomials.

Our general method consists in setting a Gaussian factorization problem on a Lie group of infinite matrices. This has proved a powerful method because it allows to compute easily enough some objects that are present in the orthogonal polynomials theory, such as recurrence relations and Christoffel-Darboux formulas. As the Gaussian factorization can be used to describe, both integrable systems and orthogonal polynomials it is a useful tool to connect both subjects. For instance, it allows to define a time evolution for the orthogonal polynomials that is the one ruled by the Toda integrable hierarchy. Consequently, the study of Lax equations, symmetries and reductions involving polynomials becomes very natural.

The main motivation for our research line, that we began in [8] and continued in [9] and [10] was the publication of a paper by Mark Adler, Pierre van Moerbeke and Pol Vanhaecke [7]. This paper studied the integrable structures of multi-component type that were present in the theory of multiple orthogonal polynomials, that had a clear connection with the work made by Evi Daems and Arno Kuijlaars [38] about non-intersecting Brownian motions. Due to the known connections between the infinite Toda lattice hierarchy and the standard theory of orthogonal polynomials, it was clear that more general Toda-type hierarchies had to be connected with some generalizations of the standard orthogonal polynomial theory.

Results

We first give a general introduction in chapter 1, where we show the historical outline of orthogonal polynomials and integrable systems. The rest of the chapters are based in the series of papers that have been the result of our research and explore the subject under different angles. They are based in the connections between some generalized orthogonal polynomial theory and the corresponding Toda-type integrable hierarchy.

Chapter 2 collects some of the results published in [87] and [88] and is devoted to the

general theory of the Toda-type integrable systems under the point of view of factorization problems. In it, we review some known results about how to build the 2D multi-component Toda integrable hierarchy using a Gaussian factorization problem, (that we will call also Gauss-Borel factorization or even LU factorization) on an infinite dimensional Lie group in the way made by Kenji Ueno and Kanehisha Takasaki [118]. Some of the results given in the section cover the well known dressing and undressing method, the Lax equations and the zero curvature equations (also named Zakharov-Shabat equations). Following the ideas on [118], [21], [85] and [86] the known ideas about 2D multi-component Toda and multi-component KP where presented with some new results about discrete flows and Hankel/Toeplitz reductions. The analysis of reductions was the seed of the following works as it led directly to the orthogonal polynomial's theory that is studied in the rest of the chapters, that is because there is a fundamental connection between the factorization of an initial condition (that is present in integrable systems) and the factorization of a moment matrix (that is present in orthogonal polynomials).

Chapter 3 reviews the results published in [8] and is devoted to the study of the connections between matrix orthogonal polynomials and some reductions of the 2D multi-component Toda hierarchies in the semi-infinite case. Based in the ideas of Mark Adler and Pierre van Moerbeke (mainly in [4]) we study some generalizations of matrix polynomials and how they are connected to Toda-type systems. The idea, as we said before is to see that the LU factorization problem can be seen as both a problem for the initial condition of an integrable system and a problem for a moment matrix. That idea acts like a bridge and allows us to obtain results on Christoffel-Darboux kernels and recursion relations. As the Riemann-Hilbert problem that is given in [4] is not correct, we tried to solve the situation in a different way, that was to use a multiple orthogonal framework and the results of [38] as a way to solve the problem. As a side-effect, that gave us the clue to build the approach that we took in the next chapter.

Chapter 4 shows the full potential of the factorization approach to connect 2D multi-component Toda hierarchies and multiple orthogonal polynomials of mixed type and collects the results published in Advances in Mathematics [9]. This is the main chapter of the thesis, where we build a connection between multiple orthogonal polynomials of mixed type and the Toda-type hierarchies. Although there has been works that show connections between multiple orthogonal polynomials of mixed type and multi-component KP [7] they did not use the factorization point of view but a very indirect approach involving the Riemann-Hilbert analysis in [38]. We thus pursued a more direct approach that needed to modify the formulation of the 2D multi-component Toda lattice in the way proposed by [21] using partitions. This approach allows us to set a Gauss-Borel factorization problem that describes both the multiple orthogonal family and the multi-component integrable system. Following that way we were able to characterize the recurrence structure of the multiple orthogonal polynomials of mixed type and to compute their Christoffel-Darboux formulas with only algebraic assumptions (avoiding the analytical approach used in Riemann-Hilbert techniques like [38]). Along with that we were able to characterize some key objects in the multiple orthogonal theories with their Toda lattice counterpart, like the polynomials and their cauchy transforms with the baker functions. To conclude, we found the τ-function representation of all these objects using determinants.

To conclude, chapter 5 exploits the techniques discovered in chapter 4 to deal with multiple orthogonal polynomials into a different framework, that is the theory of Laurent orthogonal polynomials on the unit circle. That is because the CMV representation can be considered as a multicomponent approach to orthogonality on the unit circle where positive and negative powers are treated separately. As a result it is possible to obtain very similar results to the ones obtained in 3. In particular we propose a Gaussian factorization for the problem that leads us to a very complete analysis, in particular the study of the five term recurrence relations and Christoffel-Darboux formulas. In contrast with the difficulties that the Toeplitz symmetry originates in the classical treatment of the orthogonality on the circle, our treatment follows a Hankel-like approach that makes the use of the previously used techniques very straight forward. After studying the standard CMV representation, what we do is to study generalized orderings that have snake-shaped matrices as a result. Once we study the Laurent polynomials, and their Cauchy transforms, we connect objects with the time evolution compatible with the Toda-type integrable structure that is studied in the other chapters. The consequence is the analysis of the orthogonal Laurent polynomials and their Cauchy transforms as solutions of the Toda system, so we obtain an alternative formulation of the previously known Toeplitz lattice. To conclude we study the problem of finding a τ-function representation for the polynomials as we did before, showing some of the differences and similarities between the line case and the circle case. All these results were published in [10].

Conclusions

After the elaboration of this thesis, we have concluded that the use of Gaussian factorization techniques to look for connections between the Toda-type integrable hierarchies and the theory of multiple orthogonal polynomials has been fruitful enough because of the following reasons.

- The presence of a factorization problem is a key fact in both theories, Toda-type integrable systems and orthogonal polynomials. In the orthogonal polynomial theory, the definition of the so-called moment matrix is one of the posible angles to study the problem. In the case of the analysis of integrable systems, the study of the dressing method applied to a Gaussian factorization problem is a very natural approach to the movement equations that characterize the Toda hierarchy as a dynamical system.

- The use of an LU factorization to characterize an integrable system has been useful to study the symmetries that are present in it. In fact the Hankel/Toeplitz symmetries in the inicial condition of a 2D Toda type integrable system has been critical to build the connections with orthogonal polynomials. In fact the generalization of the Hankel symmetry that is present in the moment matrix of the classical orthogonal polynomials can be extended to more general situation that have not been treated previously under our point of view, like the multiple orthogonal polynomials, and the orthogonal Laurent polynomials in the unit circle. In these cases, the consideration of generalized Hankel symmetries has been a fundamental tool to obtain Christoffel-Darboux formulas using a different approach.

- The method that we have developed has proved useful in providing a consistent approach for all the different problems studied in our thesis. This methodology has consisted in studying the symmetries that are present in an orthogonal polynomial family and use them to build a time evolution structure compatible with generalizations of the Toda integrable hierarchy.

Open problems

- We have studied the connection between some generalized orthogonal polynomials (matrix polynomials, multiple orthogonal polynomials, Laurent polynomials) and some Toda-type integrable systems under the point of view of factorization techniques. Our work has been biased towards and algebraic analysis of this connections. As a consequence we found some expressions for the recursion relations and Christoffel-Darboux kernels, but it is still an open problem how the factorization techniques and the tools borrowed from the integrability theory can lead to results of a more analytical nature, e.g. the analysis of the zeroes and the all the interesting questions regarding the asymptotic analysis of the polynomials.
- Another interesting and still open problem would be to generalize the techniques used to polynomials in more than one variable. This would be a logical step once we have dealt with the one variable case.

Índice

Capítulo 1

Introducción histórica, objetivos y resumen

Esta tesis trata de establecer conexiones entre dos áreas clásicas de las matemáticas cuyo nacimiento y desarrollo ha estado ligado también a la resolución de problemas físicos. En concreto hablamos aquí de la teoría de los polinomios ortogonales y de la teoría de los sistemas integrables, de las cuales haremos algunas menciones históricas antes de hablar del propósito de la tesis.

En primer lugar, hablemos de la teoría de los polinomios ortogonales, cuyo cuerpo teórico se remonta a los trabajos de Thomas Johannes Stieltjes [113] y de Pafnuti Lvóvich Tchebichev [115], aunque ya se utilizaban desde Adrien-Marie Legendre en el estudio de la mecánica y la astronomía. Este es un tema que puede abordarse desde el punto de vista algebraico, desde la teoría de aproximación, o (sobre todo modernamente) desde el punto de vista del análisis funcional y la teoría de la medida. La forma más sencilla de plantear el problema es considerar una familia de polinomios mónicos $\{P_n\}$ donde P_n es de grado n, un intervalo de la recta real Δ y una función w integrable y positiva en Δ que llamaremos peso. Diremos que la familia $\{P_n\}$ es una familia ortogonal en Δ respecto al peso w si

$$\int_{\Delta} P_n(x)P_m(x)w(x)dx = h_n\delta_{n,m}. \tag{1.1}$$

Habitualmente se suele definir el llamado funcional generatriz de momentos, $\mathscr{L}$, introducido por Riesz en [101] tal que $\mathscr{L}(f) = \int_{\Delta} f(x)w(x)dx$. Asociado a él se definen los momentos $\mu_n := \mathscr{L}(x^n) = \int_{\Delta} x^n w(x)dx$ que forman una serie numérica íntimamente ligada con el problema de ortogonalidad. De hecho se denomina precisamente "problema de momentos" al problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para las que una sucesión arbitraria de números μ_n sean los momentos correspondientes a un problema de ortogonalidad. En esa línea se denomina problema de Stieltjes [113] al problema concreto cuando el intervalo es el $[0, \infty]$, problema de Hamburger [65] al problema concreto en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y problema de Hausdorff cuando el intervalo es el $[0, 1]$. Para aspectos generales sobre problemas de momentos se puede consultar [105].

Más que aspectos de naturaleza teórica, como los relacionados con los problemas de momentos, nosotros utilizaremos algunos elementos concretos de la teoría de polinomios ortogonales y sus generalizaciones, en particular el estudio de las leyes de recurrencia y las fórmulas de Christoffel-Darboux. Una de las propiedades más importantes de los polinomios ortogonales es la existencia de relaciones de recurrencia de tres términos, que permiten expresar los polinomios de la familia en función de los anteriores, de la forma

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) + b_n P_{n-1}(x), \tag{1.2}$$

recíprocamente, Jean Favard [44], prueba la proposición recíproca. Es decir, bajo ciertas condiciones la existencia de relaciones de recurrencia con coeficientes dados, determina la existencia de un problema de ortogonalidad. Estas fórmulas adoptan formas más complejas cuando utilizamos una teoría de polinomios generalizada (como serán las de tipo matricial, la correspondiente a polinomios de Laurent, y la correspondiente al caso múltiplemente ortogonal), pero siempre comparten la misma estructura. Además, con los coeficientes que se obtienen en estas relaciones de recurrencia se construye la llamada matriz de Jacobi, que es la representación del operador de multiplicación por x, de cuyo análisis espectral se obtiene una gran cantidad de información, especialmente en referencia al comportamiento de los ceros de los polinomios de la familia ortogonal, tema que, aunque clásico en la literatura de polinomios, no trataremos aquí. A pesar de eso sí que utilizaremos el formalismo de la matriz de Jacobi por su conexión inmediata con los sistemas integrables, el otro tema que trataremos en esta tesis.

Otro resultado que utilizaremos con frecuencia es la llamada fórmula de Christoffel-Darboux, que da una expresión compacta para evaluar sumas de productos de los n primeros polinomios de una familia ortogonal

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(x)P_k(y)}{h_k} = \frac{1}{h_{n-1}} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x-y}. \tag{1.3}$$

y nuestro interés se centrará en encontrar equivalentes para esta fórmula en casos más generales.

A pesar de su gran interés no tratamos aquí otros temas centrales de la teoría de polinomios ortogonales como puede ser el comportamiento de los ceros, las llamadas fórmulas de cuadratura, o las cuestiones relacionadas con el comportamiento asintótico. Además de la obra de Gábor Szegő, [114], que es de referencia en el desarrollo de la materia, gran parte de la teoría estándar se puede encontrar en libros como el de Chihara, [31] o Freud [55].

El otro gran tema de la física matemática que tratamos en la tesis es el de los sistemas integrables clásicos. Desde la formulación de la mecánica clásica por Isaac Newton los problemas de n cuerpos sometidos a la interacción gravitatoria fueron un tema central de estudio para los astrónomos, físicos y matemáticos. Así como el problema de dos cuerpos fue planteado y resuelto por el propio Newton, el problema de tres cuerpos se mostró de una naturaleza diferente. A pesar de que fue estudiado por el propio Newton, Euler, Jacobi [69], y Lagrange [81], no se encontraron más que soluciones restringidas. Henri Poincaré demostró finalmente que este era el caso de sistema dinámico no integrable, para el cual no existía una solución general reducible a cuadraturas, y el conocido teorema de Liouville [83] da un criterio para reconocerlos utilizando la existencia de cantidades conservadas en involución. Esto daba pie a pensar que los sistemas integrables eran relativamente escasos.

El panorama cambia en el siglo XX cuando se empiezan a considerar nuevas aproximaciones y formulaciones de la teoría de sistemas integrables. Estas nuevas aproximaciones están relacionadas con el estudio de ecuaciones no lineales que tienen propiedades excepcionales, como la existencia de soluciones solitónicas. Los solitones son soluciones de tipo ondulatorio a ecuaciones no lineales que incluyen un término no lineal y un término dispersivo. Sus características principales son que conservan su amplitud a lo largo del tiempo y que tienen una interacción no lineal con otros solitones. Fueron descritos por primera vez por el ingeniero naval John Scott Russell [103] al observar la propagación de ondas en un canal poco profundo. La presencia de este tipo de soluciones es uno de los rasgos que presentan los sistemas integrables. Por ejemplo, la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) [77] describe los solitones de Russell, pero también se encuentran soluciones de tipo solitónico en sistemas más generales, como el de Kadomtsev-Petviashvili, [78] (KP) o el propio sistema integrable de Toda que será objeto de la tesis.

El llamado método de scattering inverso, utilizado por Gardner, Greene, Kruskal y Miura [58], permitió resolver la ecuación de Korteweg-de Vries para datos iniciales que decrecen lo suficientemente rápido en el infinito y caracterizar analíticamente las soluciones solitónicas que había observado Russell. Paralelamente se introdujo la formulación en términos de los llamados pares de Lax [82], idea central en los sistemas integrables, que consiste en expresar las ecuaciones dinámicas del sistema usando el llamado operador de Lax (que veremos que está relacionado con el operador de Jacobi de los polinomios ortogonales). Junto con ella, utilizaremos la formulación en términos de las ecuaciones de curvatura nula o de Zakharov-Shabat [120], junto con el llamado argumento de Gelfand-Dickey [60]. Igualmente importantes son los desarrollos de la escuela de Kyoto para encontrar técnicas y caracterizaciones alternativas de los sistemas integrables, como los debidos a Hirota [68] a Sato [104].

Los sistemas que estudiaremos en esta tesis son los de tipo Toda. El estudio de la jerarquía integrable de Toda proviene históricamente de la llamada *red de Toda*. La red de Toda es un modelo que fue propuesto por Morikazu Toda en 1967 [117] y que modela le evolución de una cadena unidimensional de partículas unidas por interacciones no lineales. El estudio de las propiedades de cadenas no lineales viene motivado por el experimento de Enrico Fermi, John R. Pasta y Stanislaw Ulam [51]. Dicho experimento fue realizado en la década de los 50 del siglo XX con la máquina MANIAC-I del laboratorio de Los Álamos. En él se estudió numéricamente el comportamiento de cadenas bajo distintos tipos de potenciales no lineales con un gran número de partículas.

Al tratarse de un sistema no lineal, se esperaba que hubiera una dilución estadística de la energía conforme a la clásica hipótesis ergódica. El caso opuesto es el de los sistemas lineales, en los que todo el movimiento se puede describir utilizando los modos normales del sistema. En ellos, si las condiciones iniciales del sistema corresponden a un modo normal, toda la evolución continúa dentro de dicho modo normal. Los resultados sorprendentes mostraban que al introducir una perturbación en los sistemas lineales que estudiaron no había una dilución de la energía entre todos los modos normales de la cadena lineal sino que había comportamientos que sugerían trazas de integrabilidad en el sistema.

La propuesta de Toda para estudiar este fenómeno fue el empleo de un potencial de interacción exponencial $\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar + \text{const.}$ que podía aproximarse por el de un oscilador armónico para determinados valores de los parámetros. Toda obtuvo soluciones exactas mediante el empleo de funciones elípticas que eran la generalización de los modos normales de la cadena lineal. Este hecho es de excepcional importancia, pues está conectado con la existencia de soluciones solitónicas.

La integrabilidad en el sentido de Liouville para la cadena de Toda unidimensional de N partículas fue resuelta por Hénon [66] a través del formalismo Hamiltoniano, que encontró expresiones para las correspondientes cantidades conservadas. Posteriormente, la representación del sistema con las llamadas variables de Flaschka [49, 50] permiten encontrar los pares de Lax con los que se describe esta jerarquía habitualmente.

Esta tesis tiene como objeto el estudio de propiedades de las jerarquías de tipo Toda que son relevantes para la descripción de familias de polinomios ortogonales matriciales, polinomios múltiplemente ortogonales y polinomios de Laurent ortogonales en el círculo unidad. En concreto utilizaremos la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente, de la cual daremos distintas formulaciones ligeramente distintas a lo largo de los capítulos de los que consta la tesis.

El método general de trabajo será comenzar con el estudio de un problema de factorización sobre grupos de Lie (o más concretamente sobre matrices infinitas). Este es un formalismo adecuado porque permite obtener con facilidad propiedades características de familias de polinomios ortogonales como las relaciones de recurrencia y las fórmulas de tipo Christoffel-Darboux. Además, este formalismo permite también la introducción de una evolución temporal para los polinomios ortogonales que es justo la característica de la jerarquía de Toda, de modo que su caracterización mediante las ecuaciones de Lax, y el estudio de simetrías y reducciones es muy natural.

La principal motivación para orientarnos hacia esa dirección que comenzamos en [8] (y que continuamos en [9] y [10]) fue el descubrimiento por Mark Adler, Pierre van Moerbeke y Pol Vanhaecke [7] de estructuras integrables de tipo multi-componente en la teoría de polinomios múltiplemente ortogonales, que tiene una clara conexión con el trabajo de Evi Daems y Arno Kuijlaars [38] sobre movimientos Brownianos no intersecantes. Teniendo en mente las conexiones conocidas de la jerarquía de Toda con la teoría clásica de polinomios ortogonales y los modelos hermíticos de matrices aleatorias (por ejemplo en [54]), era de esperar que el formalismo de las jerarquías de tipo multi-componente se pudiera aplicar al estudio y caracterización de los polinomios múltiplemente ortogonales, modelos de matrices aleatorias y movimientos brownianos no intersecantes. En particular, el límite semiclásico (o límite sin dispersión) de las jerarquías integrables multi-componente podría ser relevante para el análisis del límite de *gran* N, por ejemplo [90].

En el capítulo 2, que recoge los resultados del trabajo publicado en Inverse Problems [87] es de tipo introductorio. En él se formulan varias ideas ya conocidas de la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente desde el punto de vista de un problema de factorización (que llamaremos indistintamente factorización LU, factorización de Gauss o de Gauss-Borel) asociado a un grupo de Lie de dimensión infinita. El trabajo de Mikio Sato [104], y posteriores desarrollos realizados por la escuela de Kyoto a través del uso de las identidades bilineales y el formalismo de la función τ en [39]-[41], sentó las bases de la descripción de las jerarquías integrables en términos de grupos de Lie. En esta dirección hay que destacar también la contribución de Motohico Mulase [93] en la que se muestra que los problemas de factorización, el llamado proceso de revestimiento, y los sistemas lineales son la clave para la integrabilidad del sistema. En este marco de procesos de revestimiento las jerarquías multi-componente de tipo Toda fueron analizadas en profundidad por Kenji Ueno y Kanehisha Takasaki [118].

En [87] y [88] Manuel Mañas y Luis Martínez Alonso realizaron un estudio detallado de la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente donde están algunas de las ideas iniciales que llevaron a la realización de esta tesis. Basándose tanto en [118] como en trabajos sobre la jerarquía KP multi-componente, entre los cuales están [76], [21], [85] y [86] se presentó una versión de la jerarquía de Toda en la que se aportaban varias ideas originales, como la adición de parámetros discretos y la discusión de algunas reducciones. Estas reducciones, ligadas a matrices de tipo Hankel/Toeplitz, son las que constituyeron parte de mi trabajo en [87] y son las que permiten la conexión entre el problema de factorización en su forma abstracta y la factorización LU de una matriz de momentos, que es el que tiene interés desde el punto de vista de los polinomios ortogonales.

El capítulo 3, que recoge los resultados del segundo trabajo publicado en Inverse Problems [8] está dedicado a estudiar, en el caso semi-infinito, unas reducciones muy particulares de entre las estudiadas en el capítulo 2, las ligadas a soluciones relacionadas con polinomios ortogonales matriciales. Este campo ha sido un área de interés creciente por las similitudes que tiene con el caso escalar pero con una riqueza mayor [43]. Como comentamos anteriormente, la relación de los polinomios múltiplemente ortogonales con la jerarquía de KP multi-componente fueron descubiertos en [7] y el formalismo de las *string equation* para sistemas integrables ha sido aplicado a este caso particular en [90]. Mark Adler y Pierre van Moerbeke [4], introdujeron, en el contexto de la llamada jerarquía de KP discreta, lo que llamaron polinomios ortogonales generalizados y el problema de Riemann-Hilbert que los caracteriza. A pesar de parecer una extensión del problema clásico de A.S. Fokas, A.R. Its, y A.V. Kitaev [53], el problema de Riemann-Hilbert planteado en [4] no es correcto tal y como está planteado. Después estudiaron las transformaciones de Darboux [5] que actúan sobre este tipo de sistemas, y recientemente (para el caso Toeplitz) Mattia Cafasso [28] extendió este trabajo para incluir matrices por bloques que conectaban los polinomios ortogonales matriciales con la red de Ablowitz-Ladick ([1, 2]) no abeliana. Utilizando los mismos argumentos de [4] podemos razonar como sigue: i) por un lado la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente se puede entender como una factorización LU de cierta matriz infinita con una evolución temporal concreta ii) por otro lado, dicha matriz se puede ver como una matriz de momentos para un problema de ortogonalidad y la correspondiente factorización LU permite obtener los polinomios matriciales generalizados. De este modo, podemos conectar la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente con la teoría de polinomios ortogonales matriciales. Para construir esta conexión primero relacionamos los polinomios matriciales ortogonales y bi-ortogonales con la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente empleando una reducción particular de tipo Hankel. Después generalizamos la condición de matrices por bandas que se obtiene en [4] al caso multi-componente y consideramos lo que llamamos simetría Hankel multi-graduada. Esto lleva de forma natural a una extensión multi-componente de los polinomios generalizados de Adler y van Moerbeke que en ciertos casos se pueden describir utilizando polinomios múltiplemente ortogonales mixtos con una normalización tipo II. Esta conexión nos permite plantear un problema de Riemann-Hilbert correcto para este problema, corrigiendo el error de [4]. En cierto modo, la forma de tratar el problema es similar al de [17]-[19], en el que se aborda el estudio de relaciones de recurrencia mediante la agrupación vectorial de polinomios.

En el capítulo 4, que recoge los resultados del trabajo de Advances in Mathematics [9], se introducen y estudian elementos propios de la teoría de los polinomios múltiplemente ortogonales. La construcción de conexiones entre ambas estructuras (polinomios múltiplemente ortogonales y jerarquías integrables) es el tema central del capítulo 4 y de hecho, de toda la tesis.

La ortogonalidad múltiple de polinomios es un tema conectado con varias áreas de las Matemáticas. En particular con el de la llamada aproximación racional simultánea. La historia de la aproximación racional simultánea empieza en 1873 con el conocido artículo [67] en el que Hermite prueba la trascendencia de la constante de Euler e. Con posterioridad, en los años 1934-35, K. Mahler dio varias lecciones en la Universidad de Groningen [84] donde sentó las bases de la teoría. Mientras tanto, dos estudiantes de Malher, J. Coates y H. Jager, hicieron importantes contribuciones a este respecto (ver [32] y [70]).

Los polinomios múltiplemente ortogonales se han empleado pruebas de irracionalidad (en teoría de números). Por ejemplo, en [24], F. Beukers muestra que la prueba de Apery (ver [14]) de la irracionalidad de la función de Riemann $\zeta(3)$ puede ser reformulada en términos de una combinación de polinomios múltiplemente ortogonales de tipo I y tipo II, llamada ortogonalidad múltiple mixta. La ortogonalidad de tipo múltiple también ha aparecido en teorías de matrices aleatorias y movimientos brownianos no intersecantes (ver, por ejemplo, [25], [38] y [80]). Como es conocido, en [53] se encontró un problema de Riemann-Hilbert que caracteriza a los polinomios ortogonales, y posteriormente [15] este resultado fue extendido a los polinomios múltiplemente ortogonales de tipo I y tipo II. En [38] la ortogonalidad de tipo mixto se caracteriza desde esta perspectiva y se emplea para obtener una fórmula de Christoffel-Darboux para este tipo de polinomios.

Como hemos comentado, M. Adler y P. van Moerbeke mostraron como el problema de factorización de Gauss-Borel aparece en lo que definen como jerarquía de KP discreta [3]-[5]. En estos trabajos se clarifica (desde el punto de vista de la teoría de grupos) por qué la ortogonalidad estándar para polinomios y la integrabilidad de ecuaciones no lineales están tan relacionados. De hecho, la factorización de Gauss-Borel de la matriz de momentos de un sistema ortogonal se puede entender como la factorización de Gauss-Borel de la jerarquía integrable asociada. Para ver la conexión entre el trabajo de Mulase y el de Adler y van Moerbeke se puede ver [48]. En el trabajo reciente [7], se muestra que la construcción múltiplemente ortogonal descrita en los párrafos anteriores está ligada con la jerarquía KP multi-componente. De hecho, dados unos pesos $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ y grados $(\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)$ los autores construyen una matriz finita que tiene el papel de matriz de momentos, y usando el problema de Riemann-Hilbert de [38], prueban que los determinantes de las matrices de momentos construidas son funciones τ que verifican la ecuación bilineal de la jerarquía de KP multi-componente. Sin embargo, a pesar de que los autores lo han hecho en sus trabajos anteriores, no se menciona ninguna factorización de Gauss-Borel en el trabajo más reciente. Por eso, el objetivo del capítulo 4 es la construcción de una factorización de Gauss-Borel apropiada en el grupo de las matrices semi-infinitas que conducen a la ortogonalidad múltiple y a la integrabilidad de forma simultánea.

Por último, el capítulo 5, que recoge los resultados del segundo trabajo publicado en Advances of Mathematics [10], estudia los polinomios ortogonales de Laurent en el círculo unitario (OLPUC), un tema fuertemente relacionado con el de los polinomios ortogonales en el círculo unitario (OPUC), ver [114], [106] y [107]. A pesar de que es bien conocido por sus aplicaciones a la teoría de la aproximación estamos interesados principalmente en su conexión con la teoría general de los sistemas integrables.

Los polinomios ortogonales en la recta real y los polinomios en el círculo unitario tienen muchas conexiones y aspectos similares. Es bien conocido, por ejemplo que hay una profunda conexión entre los polinomios ortogonales en la recta real (OPRL) en $[-1, 1]$ y los OPUC (por ejemplo [55, 22]). Si en los polinomios ortogonales en la recta real, es de interés el comportamiento de sus ceros, también hay un número relevante de estudios sobre el comportamiento de los ceros de los OPUC, por ejemplo [13, 20],o [57, 62, 91, 97], que tienen aplicaciones en teoría de la señal y teoría de predicción de series temporales, ver [71, 73, 98, 99].

Para el análisis de los polinomios ortogonales en el círculo unitario generalmente se aplican técnicas asociadas a la teoría espectral, que requieren el estudio del operador de multiplicación por z. El estudio de la matriz asociada a este operador da una gran cantidad de información, y en particular conduce a la existencia de las relaciones de recurrencia entre polinomios. Ambos, los polinomios ortogonales en la recta real y los polinomios ortogonales en el círculo unitario tienen leyes de recurrencia, pero hay una diferencia fundamental entre ambas. Mientras que en el caso real las relaciones de recurrencia de tres términos típicas de los polinomios en la recta están asociados a una matriz tridiagonal, el llamado operador de Jacobi. Sin embargo en el caso del círculo este razonamiento conduce a una matriz de Hessenberg [64], más complicada que la matriz tridiagonal asociada al operador de Jacobi (ya que no es una matriz con un número finito de diagonales que no se anulan).

Los polinomios ortogonales de Laurent en la recta real (OLPRL), fueron introducidos en [74, 75] en el contexto del llamado problema fuerte de momentos de Stieltjes, (generalización del problema clásico de Stieltjes) el problema de encontrar una medida positiva μ tal que sus momentos

$$\mu_j = \int_{\mathbb{R}} x^j d\mu(x) \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1.4}$$

sean conocidos. Cuando el problema tiene solución, existen polinomios $\{Q_n\}$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}} x^{-n+j} Q_n(x) d\mu(x) = 0, \qquad j = 0, \dots, n-1, \tag{1.5}$$

que se denominan polinomios de Laurent o L-polinomios. La teoría de polinomios de Laurent en la recta fue desarrollada en paralelo con la teoría de polinomios ortogonales, ver [33, 42, 72] y [96]. Los polinomios ortogonales de Laurent fueron llevados de la recta real al círculo unitario [116] y trabajos posteriores ampliaron el trabajo (por ejemplo [36, 29, 34, 35]), tratando temas como las relaciones de recurrencia, teoremas de tipo Favard, fórmulas de cuadratura, y fórmulas de Christoffel-Darboux.

El análisis de los OLPUC, especialmente usando la representación de Cantero-Moral-Velázquez (CMV[1]) [29] es útil para estudiar propiedades de los llamados polinomios de Szegő (los polinomios ortogonales en el círculo unitario). Esto es por diferentes razones. En primer lugar, como mencionamos anteriormente, mientras que los OLPUC son siempre densos en $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ esto no es en general cierto en los OPUC, ver [26] y [36]. En segundo lugar, la biyección entre los OLPUC en la representación CMV y los polinomios ordinarios en el círculo unitario (o polinomios de Szegő) permite reemplazar las complicadas relaciones de recurrencia con una relación con solo cinco términos más parecida a la que aparece en el caso real. La representación del operador de multiplicación por z es mucho más natural si se usan matrices CMV que si se usan matrices de tipo Hessenberg. Esta es nuestra principal motivación para emplear este tipo de matrices como un elemento principal en nuestro marco. Otros trabajos han revisado y ampliado el estudio de

[1]Emplearemos esta denominación porque es la más habitual, a pesar de que esta representación ya se conocía anteriormente, por ejemplo en D. S. Watkins [119].

las matrices de tipo CMV, por ejemplo [108, 79]. Órdenes alternativos para la base de potencias de z sobre la que se construye el espacio de polinomios también se pueden consultar en [35] en el que se estudian diversas generalizaciones de las originales propuestas en el trabajo CMV original.

Las jerarquías integrables también aparecen en este contexto. En [6] se estudia la conexión entre los OPUC y las jerarquías de tipo Toda, que se llama en este caso la red de Toeplitz. Una reducción relevante de las ecuaciones de la red de Toeplitz fue encontrada por Leonid Golinskii [63] empleando los llamados flujos de Schur cuando la medida es invariante bajo conjugación. Otro trabajo interesante sobre el tema es [92]. La red de Toeplitz se ha probado equivalente a la red de Ablowitz-Ladik, [1, 2], y ese trabajo fue generalizado a la conexión entre la ortogonalidad matricial en el círculo y la red no abeliana de Ablowitz-Ladik en [28]. Ambos tienen que tratar con el operador Hessenberg para la multiplicación por z. Otros trabajos donde se relacionan los polinomios en el círculo unitario con una estructura integrable son los de Irina Nenciu [94] (desde un punto de vista más Hamiltoniano) el de Barry Simon [109] (que profundiza en el estudio de los flujos de Schur en la linea de [63]) y el de Bertola [23]. En la línea de los flujos de Schur también tenemos [45]-[47].

Nuestro objetivo en ese capítulo es explorar la conexión entre los sistemas integrables de tipo Toda y la ortogonalidad en el círculo desde un punto de vista distinto. Como probamos en este capítulo, la representación CMV sirve de puente entre las técnicas de factorización usadas en el capítulo 4 y el caso circular. Veremos que muchos resultados allí obtenidos sobre fórmulas de Christoffel-Darboux (CD), deformaciones continuas y discretas, y expresiones ligadas a la función τ se pueden extender al caso circular bajo la elección adecuada de la matriz de momentos y los operadores de traslación.

Capítulo 2

La jerarquía de Toda bidimensional multi-componente

2.1. Planteamiento y problema de factorización

Con el fin de que sirva como introducción en este capítulo se construye la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente [118] desde el punto de vista de un problema de factorización en un grupo de Lie de dimensión infinita. Mientras que en el resto de los capítulos el enfoque es de tipo semi-infinito y ligado a la teoría de polinomios ortogonales, en este caso abordaremos el problema desde la perspectiva doblemente infinita en un marco teórico más abstracto.

El esquema del capítulo es el que sigue: En la sección 2.1 introducimos un problema de factorización en un grupo de Lie como el presentado en [118]. Este problema de factorización tiene su motivación en las ideas usadas (en el marco de KP) para la llamada jerarquía KP discreta. A continuación definimos una deformación del problema de factorización inicial mediante la introducción de parámetros temporales continuos y discretos. Los parámetros continuos generan los flujos clásicos de Toda, mientras que los parámetros discretos dan lugar a flujos discretos (que no habían sido considerados antes para esta jerarquía) que se formulan de manera análoga a los flujos de Toda clásicos. Más adelante, en la sección 2.2 derivamos las llamadas ecuaciones de Lax continuas y discretas para la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente, donde también mostramos algunos ejemplos de ecuaciones de la jerarquía. En particular se obtienen ecuaciones de tipo Toda multi-componente puramente discretas y otras que combinan partes discretas con partes continuas. Terminamos el capítulo con la sección 2.3 en la que estudiamos algunas reducciones de esta jerarquía para las que se obtienen matrices Hankel y Toeplitz por bloques. La consideración de estas reducciones está motivada por su relevancia en el estudio de las conexiones entre la teoría de la integrabilidad en redes de tipo Toda y la teoría de polinomios ortogonales y múltiplemente ortogonales. Estas conexiones ya se han investigado en trabajos previos sobre la jerarquía de Toeplitz [6] o la jerarquía de Ablowitz-Ladik [28]. Algunas de estas reducciones caracterizan soluciones de Toda periódicas en las variables discretas. Otras sin embargo son relaciones de tipo Hankel/Toeplitz y generalizaciones de la reducción bigraduada [30], asociada con flujos extendidos de la jerarquía de toda unidimensional.

2.1.1. Notación empleada para sucesiones, álgebras y grupos de Lie

A lo largo de este capítulo utilizaremos las siguientes notaciones de uso común. Llamaremos $\{E_{kl}\}_{k,l=1}^{N}$ a la base canónica estándar $(E_{kl})_{k'l'}=\delta_{ll'}\,\delta_{kk'}$ de $M_N(\mathbb{C})$ y designaremos con $\mathbb{I}_N$ a la matriz identidad de $M_N(\mathbb{C})$. Utilizaremos $M_N(\mathbb{C})$ para designar al álgebra asociativa de matrices complejas $N\times N$ y consideraremos el espacio lineal de sucesiones[1] doblemente infinitas con valores en $M_N(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z} & \mapsto & M_N(\mathbb{C}) \\ n & \mapsto & f(n) \end{array}$$

El operador de traslación Λ actúa sobre esas sucesiones de modo que $(\Lambda f)(n):=f(n+1)$. Una sucesión $X:\mathbb{Z}\to M_N(\mathbb{C})$ puede actuar multiplicando por la izquierda sobre este espacio, y por lo tanto hemos de manejar expresiones del tipo $X\Lambda^j$, donde $X=X(n)$ es una sucesión que actúa multiplicando por la izquierda: $(X\Lambda^j)(f)(n):=X(n)\cdot f(n+j)$. Además, si definimos el producto $(X(n)\Lambda^i)\cdot(Y(n)\Lambda^j):=X(n)Y(n+i)\Lambda^{i+j}$ tenemos que el conjunto $\mathfrak{g}$ de series de Laurent en Λ es un álgebra asociativa, que puede ser dotada también de estructura de álgebra de Lie con el conmutador habitual para operadores lineales. Es interesante señalar que se puede pensar en $\mathfrak{g}$ como $M_N(M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}))$ además de como el conjunto de series de Laurent en Λ con coeficientes en $M_N(\mathbb{C})$. Es decir, matrices doblemente infinitas con coeficientes en $M_N(\mathbb{C})$, o bien matrices $N\times N$ cuyos coeficientes son matrices doblemente infinitas de números complejos.

Esta álgebra de Lie tiene la siguiente descomposición.

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-, \tag{2.1}$$

donde

$$\mathfrak{g}_+:=\Big\{\sum_{j\geq 0}X_j(n)\Lambda^j,\quad X_j(n)\in M_N(\mathbb{C})\Big\},\qquad \mathfrak{g}_-:=\Big\{\sum_{j<0}X_j(n)\Lambda^j,\quad X_j(n)\in M_N(\mathbb{C})\Big\},$$

son subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ cuya intersección es el elemento neutro del álgebra.

2.1.2. Grupos de Lie y el problema de factorización

El grupo de elementos de $\mathfrak{g}$ que tienen inverso es un grupo de Lie que llamaremos G y tiene a $\mathfrak{g}$ como su álgebra de Lie. La descomposición (2.1) nos lleva a considerar la siguiente factorización para un elemento $g\in G$

$$g=g_-^{-1}g_+,\quad g_\pm\in G_\pm \tag{2.2}$$

donde $G_\pm$ tienen a $\mathfrak{g}_\pm$ como álgebras de Lie respectivamente. Explícitamente, G_+ es el conjunto de operadores lineales invertibles de la forma $\sum_{j\geq 0}g_j(n)\Lambda^j$; mientras que G_- es el conjunto de operadores lineales invertibles de la forma $\mathbb{I}_N+\sum_{j<0}g_j(n)\Lambda^j$.

Introducimos ahora dos conjuntos de índices, $\mathbb{S},\tilde{\mathbb{S}}=\{1,\dots,N\}$ con el mismo cardinal N. Generalmente usaremos las letras k,l para referirnos a elementos en $\mathbb{S}$ o $\tilde{\mathbb{S}}$. En cambio usaremos las letras a,b,c para referirnos a elementos en $\mathcal{S}:=\mathbb{S}\cup\tilde{\mathbb{S}}$.

[1]En general trataremos las sucesiones y series desde el punto de vista formal, salvo en casos excepcionales donde podamos especificar algo sobre su convergencia.

Definimos ahora también dos operadores $W_0, \tilde{W}_0 \in G$

$$W_0 := \sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{s_k}\, \mathrm{e}^{\sum_{j=0}^{\infty} t_{jk}\Lambda^j}, \tag{2.3}$$

$$\tilde{W}_0 := \sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{-\tilde{s}_k}\, \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{t}_{jk}\Lambda^{-j}}, \tag{2.4}$$

donde $s_k, \tilde{s}_k \in \mathbb{Z}$, $t_{jk}, \tilde{t}_{jk} \in \mathbb{C}$ son parámetros de deformación, que en adelante serán considerados parámetros de evolución temporal discreta y continua respectivamente.

El problema de factorización Dado un elemento $g \in G$, que admite la factorización (2.2), y un conjunto de parámetros de deformación $s = (s_k, \tilde{s}_k), t = (t_{jk}, \tilde{t}_{jk})$ donde $j = 1, 2, \ldots,$ y $k = 1, \ldots, N$ consideramos el problema de factorización "deformado" (dependiente del tiempo)

$$W_0 g \tilde{W}_0^{-1} = S(s,t)^{-1}\tilde{S}(s,t), \quad S \in G_- \text{ y } \tilde{S} \in G_+. \tag{2.5}$$

En este capítulo solo estudiaremos el llamado *sector de carga nula*

$$|s| := \sum_{j=1}^{N} s_j + \tilde{s}_j = 0, \tag{2.6}$$

y consideraremos valores lo suficientemente pequeños para los parámetros de tipo continuo como para que la factorización se pueda seguir realizando. La razón para elegir este tipo de desplazamientos en este capítulo es la existencia de condiciones iniciales no factorizables cuando no se respeta esa condición.

Habitualmente, pero no siempre, no consideraremos los tiempos t_{0k}. La razón para ello es que la factorización obtenida añadiendo esos tiempos solo añade factores multiplicativos, pero aun así serán útiles en las reducciones que se verán al final del capítulo.

Para terminar la sección definiremos algunos subgrupos y subálgebras que tendrán un papel importante en el trabajo posterior. En primer lugar, un operador $A = \sum_{j\in\mathbb{Z}} A_j(n)\Lambda^j$ conmuta con Λ si y solo si sus coeficientes A_j no dependen de n. Por lo tanto, el centralizador de Λ en $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{z}_\Lambda := \{A \in \mathfrak{g} : [A, \Lambda] = 0\} = \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} A_j\Lambda^j, A_j \in M_N(\mathbb{C})\right\}$. Es fácil comprobar que $\mathfrak{z}_\Lambda \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie y una interpretación para esta situación es identificar los elementos de $\mathfrak{z}_\Lambda$ con matrices doblemente infinitas de tipo Toeplitz por bloques $N \times N$.

Una subálgebra abeliana $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{z}_\Lambda$ está dada por el centralizador de $\{\Lambda, E_{kk}\}_{k=1}^N$ en $\mathfrak{g}$; es decir, $\mathfrak{h} := \{A \in \mathfrak{g} : [A, \Lambda] = [A, E_{kk}] = 0, k = 1, \ldots, N\} = \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} A_j\Lambda^j, A_j \in \operatorname{diag}_N(\mathbb{C})\right\}$ donde $\operatorname{diag}_N(\mathbb{C})$ es la subálgebra de matrices diagonales de $M_N(\mathbb{C})$. Entonces, $\mathfrak{h}$ es el conjunto de series de Laurent en Λ con coeficientes diagonales e independientes de n.

Dos subgrupos especialmente importantes son: $G_- \cap \mathfrak{z}_\Lambda = \{\mathbb{I}_N + c_1\Lambda^{-1} + c_2\Lambda^{-2} + \cdots, c_j \in M_N(\mathbb{C})\}$ y $G_+ \cap \mathfrak{z}_\Lambda = \{\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1\Lambda + \tilde{c}_2\Lambda^2 + \cdots, \quad \tilde{c}_0 \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{C}),\ \tilde{c}_j \in M_N(\mathbb{C}), j \geq 1\}$.

Finalmente, tenemos los subgrupos de Lie abelianos $H := G \cap \mathfrak{h}$ y $H_\pm := G_\pm \cap \mathfrak{h}$. De las definiciones anteriores se sigue que $W_0, \tilde{W}_0$ toman valores en H.

2.2. Ecuaciones de Lax y Zakharov-Shabat

2.2.1. Proceso de revestimiento. Operador de Lax y operadores C

Definición 2.1. Definimos los llamados operadores de revestimiento $W, \tilde{W}$ como sigue

$$W := SW_0, \qquad \tilde{W} := \tilde{S}\tilde{W}_0. \tag{2.7}$$

En términos de estos operadores de revestimiento el problema de factorización (2.5) en G se puede escribir como

$$Wg = \tilde{W}. \tag{2.8}$$

De esta definición se sigue el siguiente desarrollo en Λ para los operadores $S, \tilde{S}$

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{I}_N + \varphi_1(n)\Lambda^{-1} + \varphi_2(n)\Lambda^{-2} + \cdots \in G_-, \\ \tilde{S} &= \tilde{\varphi}_0(n) + \tilde{\varphi}_1(n)\Lambda + \tilde{\varphi}_2(n)\Lambda^2 + \cdots \in G_+, \end{aligned} \tag{2.9}$$

aunque también usaremos en algunas ocasiones la notación

$$\beta := \varphi_1, \qquad \mathrm{e}^{\phi} := \tilde{\varphi}_0.$$

Se pueden obtener entonces las siguientes expresiones para W y $\tilde{W}$

$$\begin{aligned} W &= (\mathbb{I}_N + \varphi_1(n)\Lambda^{-1} + \varphi_2(n)\Lambda^{-2} + \cdots) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{s_k} \exp\Big(\sum_{j=0}^{\infty} t_{jk}\Lambda^j\Big)\Big), \\ \tilde{W} &= (\tilde{\varphi}_0(n) + \tilde{\varphi}_1(n)\Lambda + \tilde{\varphi}_2(n)\Lambda^2 + \cdots) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{-s_{\tilde{k}}} \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} t_{j\tilde{k}}\Lambda^{-j}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Definición 2.2. Los operadores de Lax $L, \tilde{L}, C_{kl}, \tilde{C}_{kl}, \mathcal{C}_{kl}, \tilde{\mathcal{C}}_{kl} \in \mathfrak{g}$ están dados por

$$L := W\Lambda W^{-1}, \qquad \tilde{L} := \tilde{W}\Lambda^{-1}\tilde{W}^{-1}, \tag{2.11}$$

$$C_{kl} := WE_{kl}W^{-1}, \qquad \tilde{C}_{kl} := \tilde{W}E_{kl}\tilde{W}^{-1} \tag{2.12}$$

$$\mathcal{C}_{kl} := SE_{kl}S^{-1}, \qquad \tilde{\mathcal{C}}_{kl} := \tilde{S}E_{kl}\tilde{S}^{-1}. \tag{2.13}$$

Debido a que W_0, $\tilde{W}_0 \in H$, en la definición anterior de $L, \tilde{L}, C_{kk}$ y $\tilde{C}_{kk}$, podemos reemplazar los operadores W y $\tilde{W}$ por S y $\tilde{S}$, respectivamente.

Las siguientes fórmulas se obtienen mediante cálculo directo a partir de la definición

Proposición 2.3. *1. Se verifican las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned} C_{kl} &= L^{s_k - s_l} \exp\Big(\sum_{j=0}^{\infty}(t_{jk} - t_{jl})L^j\Big)\mathcal{C}_{kl}, \\ \tilde{C}_{kl} &= \tilde{L}^{\tilde{s}_k - \tilde{s}_l} \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(\tilde{t}_{jk} - \tilde{t}_{jl})\tilde{L}^j\Big)\tilde{\mathcal{C}}_{kl}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2. Los operadores de Lax tienen los siguientes desarrollos

$$\begin{aligned} L &= \Lambda + u_1(n) + u_2(n)\Lambda^{-1} + \cdots, & \tilde{L} &= \tilde{u}_0(n)\Lambda^{-1} + \tilde{u}_1(n) + \tilde{u}_2(n)\Lambda + \cdots, \\ \mathcal{C}_{kl} &= E_{kl} + C_{kl,1}(n)\Lambda^{-1} + C_{kl,2}(n)\Lambda^{-2} + \cdots, & \tilde{\mathcal{C}}_{kl} &= \tilde{C}_{kl,0}(n) + \tilde{C}_{kl,1}(n)\Lambda + \tilde{C}_{kl,2}(n)\Lambda^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{2.15}$$

3. *Los operadores C satisfacen*

$$\mathbb{I}_N = \sum_{k=1}^{N} C_{kk}, \quad \mathbb{I}_N = \sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_{kk}, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} C_{kl}C_{k'l'} &= \delta_{lk'}C_{kl'}, \quad C_{kl}L = LC_{kl}, \\ \tilde{C}_{kl}\tilde{C}_{k'l'} &= \delta_{lk'}\tilde{C}_{kl'}, \quad \tilde{C}_{kl}\tilde{L} = \tilde{L}\tilde{C}_{kl}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.2.2. Ecuaciones de Lax y Zakharov-Shabat

En esta sección utilizaremos el problema de factorización (2.8) para deducir dos grupos de ecuaciones que llamaremos ecuaciones de Lax y ecuaciones de Zakharov-Shabat (o de curvatura nula), que como mostraremos a continuación son formas equivalentes de caracterizar la integrabilidad del sistema. Introduzcamos primero la notación que vamos a utilizar

Definición 2.4. 1. Los desplazamientos “de carga nula” T_K para $K = (a, b)$ se definen como sigue

$$s_a \to s_a + 1, \qquad\qquad s_b \to s_b - 1,$$

dejando constantes el resto de las variables discretas.

2.

$$\begin{aligned} \theta_{jk} &:= \frac{\partial W_0}{\partial t_{jk}} W_0^{-1}, & \tilde{\theta}_{jk} &:= \frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \tilde{t}_{jk}} \tilde{W}_0^{-1}, \\ q_K &:= (T_K W_0) W_0^{-1}, & \tilde{q}_K &:= (T_K \tilde{W}_0) \tilde{W}_0^{-1}, \quad K = (a, b). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{jk} &:= W\theta_{jk}W^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_{jk} := \tilde{W}\tilde{\theta}_{jk}\tilde{W}^{-1}, \\ \mathcal{U}_K &:= Wq_KW^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{U}}_K := \tilde{W}\tilde{q}_K\tilde{W}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

4.

$$\begin{aligned} B_{jk} &:= (\mathcal{R}_{jk})_+, \quad \tilde{B}_{jk} := (\tilde{\mathcal{R}}_{jk})_- \in \mathfrak{g}, & (\mathcal{R}_{jk})_\pm, (\tilde{\mathcal{R}}_{jk})_\pm \in \mathfrak{g}_\pm, \\ \omega_K &:= (\mathcal{U}_K\tilde{\mathcal{U}}_K^{-1})_-\mathcal{U}_K = (\mathcal{U}_K\tilde{\mathcal{U}}_K^{-1})_+\tilde{\mathcal{U}}_K \in G, & (\mathcal{U}_K\tilde{\mathcal{U}}_K^{-1})_\pm \in G_\pm. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Se pueden definir también los siguientes objetos

$$\pi_a := \begin{cases} E_{kk}, & a = k \in \mathbb{S}, \\ 0, & a \in \tilde{\mathbb{S}}, \end{cases} \qquad \tilde{\pi}_a := \begin{cases} 0, & a \in \mathbb{S}, \\ E_{kk}, & a = k \in \tilde{\mathbb{S}}, \end{cases} \tag{2.20}$$

y con las definiciones anteriores se puede comprobar que

$$\begin{aligned} \theta_{jk} &= E_{kk}\Lambda^j, & \tilde{\theta}_{jk} &= E_{kk}\Lambda^{-j}, \\ q_K &= \mathbb{I}_N + \pi_a(\Lambda - \mathbb{I}_N) + \pi_b(\Lambda^{-1} - \mathbb{I}_N), & \tilde{q}_K &= \mathbb{I}_N + \tilde{\pi}_a(\Lambda^{-1} - \mathbb{I}_N) + \tilde{\pi}_b(\Lambda - \mathbb{I}_N), \quad K = (a, b). \end{aligned}$$

Se puede comprobar a partir de la definición que el conjunto de los operadores de traslación discreta dejan invariante el sector de carga nula y constituyen un grupo conmutativo, es decir

$$T_K T_{K'} = T_{K'} T_K, \tag{2.21}$$

$$T_{(a,b)} T_{(b,a)} = \mathrm{id}, \tag{2.22}$$

y además satisfacen las relaciones cíclicas

$$T_{(a,b)} T_{(b,c)} T_{(c,a)} = \mathrm{id}. \tag{2.23}$$

Proposición 2.5. *Las relaciones* (2.21)-(2.23) *son equivalentes a*

$$T_{(a,b)} T_{(b,c)} = T_{(b,c)} T_{(a,b)} = T_{(a,c)}, \tag{2.24}$$

donde $T_{(a,a)} = \mathrm{id}$.

Demostración. Obviamente (2.24) se deduce de (2.21)-(2.23). También es fácil ver que (2.22) y (2.23) se deducen de (2.24). La parte no trivial de la proposición es probar que (2.24) implica (2.21):

$$\begin{aligned} T_{(a,b)} T_{(c,d)} &= T_{(a,c)} T_{(c,b)} T_{(c,b)} T_{(b,d)} = T_{(a,c)} T_{(c,b)} T_{(b,d)} T_{(c,b)} \\ &= T_{(a,c)} T_{(c,d)} T_{(c,b)} = T_{(c,d)} T_{(a,c)} T_{(c,b)} = T_{(c,d)} T_{(a,b)}. \end{aligned}$$

□

La definición implica que $B_{jk} = (C_{kk} L^j)_+$, $\tilde{B}_{jk} = (\tilde{C}_{kk} \tilde{L}^j)_-$ y además también se ve que de (2.18) y (2.19) se puede deducir que

$$\omega_K = \pi_a \Lambda + a_K + \tilde{a}_K \Lambda^{-1}, \tag{2.25}$$

para ciertas sucesiones de matrices $a_K(n)$ y $\tilde{a}_K(n)$.

Ahora podemos derivar los siguientes sistemas lineales para los operadores de revestimiento, las ecuaciones que satisfacen los operadores de Lax y las condiciones de compatibilidad para el sistema que resulta. Esta es la caracterización de la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente como sistema integrable

Teorema 2.6. *1. Los operadores de revestimiento satisfacen las siguientes ecuaciones lineales*

$$\frac{\partial W}{\partial t_{jk}} = B_{jk} W, \qquad \frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{jk}} = \tilde{B}_{jk} W, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{jk}} = B_{jk} \tilde{W}, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{jk}} = \tilde{B}_{jk} \tilde{W}, \tag{2.26}$$

$$T_K W = \omega_K W, \qquad T_K \tilde{W} = \omega_K \tilde{W}. \tag{2.27}$$

2. Se verifican las llamadas ecuaciones de Lax

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial t_{jk}} = [B_{jk}, L], \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_{jk}} = [B_{jk}, \tilde{L}], \quad \frac{\partial C_{kk}}{\partial t_{jl}} = [B_{jl}, C_{kk}], \quad \frac{\partial \tilde{C}_{kk}}{\partial t_{jl}} = [B_{jl}, \tilde{C}_{kk}], \\ &\frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_{jk}} = [\tilde{B}_{jk}, L], \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}_{jk}} = [\tilde{B}_{jk}, \tilde{L}], \quad \frac{\partial C_{kk}}{\partial \tilde{t}_{jl}} = [\tilde{B}_{jl}, C_{kk}], \quad \frac{\partial \tilde{C}_{kk}}{\partial \tilde{t}_{jl}} = [\tilde{B}_{jl}, \tilde{C}_{kk}], \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} T_K L &= \omega_K L \omega_K^{-1}, \qquad T_K \tilde{L} = \omega_K \tilde{L} \omega_K^{-1}, \\ T_K C_{kk} &= \omega_K C_{kk} \omega_K^{-1}, \quad T_K \tilde{C}_{kk} = \omega_K \tilde{C}_{kk} \omega_K^{-1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

3. *Se satisfacen las ecuaciones de Zakharov-Shabat o de curvatura nula*

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{ik}}{\partial t_{jl}}-\frac{\partial B_{jl}}{\partial t_{ik}}+[B_{ik},B_{jl}]=0,\\ \frac{\partial \tilde{B}_{ik}}{\partial t_{jl}}-\frac{\partial B_{jl}}{\partial \tilde{t}_{ik}}+[\tilde{B}_{ik},B_{jl}]=0,\\ \frac{\partial \tilde{B}_{ik}}{\partial \tilde{t}_{jl}}-\frac{\partial \tilde{B}_{jl}}{\partial \tilde{t}_{ik}}+[\tilde{B}_{ik},\tilde{B}_{jl}]=0,\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}T_K B_{jk}&=\frac{\partial \omega_K}{\partial t_{jk}}\omega_K^{-1}+\omega_K B_{jk}\omega_K^{-1},\\ T_K\tilde{B}_{jk}&=\frac{\partial \omega_K}{\partial t_{jk}}\omega_K^{-1}+\omega_K \tilde{B}_{jk}\omega_K^{-1},\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$(T_K\omega_{K'})\omega_K=(T_{K'}\omega_K)\omega_{K'}. \tag{2.32}$$

Demostración. 1. El problema de factorización (2.5) implica el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t_{jk}}W^{-1}&=\frac{\partial S}{\partial t_{jk}}S^{-1}+S\theta_{jk}S^{-1}=\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t_{jk}}\tilde{S}^{-1}=\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{jk}}\tilde{W}^{-1},\\ \frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{jk}}W^{-1}&=\frac{\partial S}{\partial \tilde{t}_{jk}}S^{-1}=\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}_{jk}}\tilde{S}^{-1}+\tilde{S}\tilde{\theta}_{jk}\tilde{S}^{-1}=\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{jk}}\tilde{W}^{-1},\end{aligned} \tag{2.33}$$

y de ecuaciones en diferencias finitas

$$(T_KW)W^{-1}=(T_KS)q_KS^{-1}=(T_K\tilde{S})\tilde{q}_K\tilde{S}^{-1}=(T_K\tilde{W})\tilde{W}^{-1}. \tag{2.34}$$

En primer lugar, vemos que (2.33) implica $\frac{\partial S}{\partial t_{jk}}S^{-1}+\mathcal{R}_{jk}=\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t_{jk}}\tilde{S}^{-1}$ y $\frac{\partial S}{\partial t_{jk}}S^{-1}=\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t_{jk}}\tilde{S}^{-1}+\tilde{\mathcal{R}}_{jk}$, por lo tanto $\frac{\partial S}{\partial t_{jk}}S^{-1}=-(\mathcal{R}_{jk})_-\in\mathfrak{g}_-$, $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t_{jk}}\tilde{S}^{-1}=(\mathcal{R}_{jk})_+\in\mathfrak{g}_+$, $\frac{\partial S}{\partial \tilde{t}_{jk}}S^{-1}=(\tilde{\mathcal{R}}_{jk})_-\in\mathfrak{g}_-$ y $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}_{jk}}\tilde{S}^{-1}=-(\tilde{\mathcal{R}}_{jk})_+\in\mathfrak{g}_+$ de modo que usando otra vez (2.33) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t_{jk}}W^{-1}&=-(\mathcal{R}_{jk})_-+\mathcal{R}_{jk}=B_{jk}=(\mathcal{R}_{jk})_+=\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{jk}}\tilde{W}^{-1},\\ \frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{jk}}W^{-1}&=(\tilde{\mathcal{R}}_{jk})_-=\tilde{B}_{jk}=-(\tilde{\mathcal{R}}_{jk})_++\tilde{\mathcal{R}}_{jk}=\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{jk}}\tilde{W}^{-1}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

La ecuación (2.34) implica

$$(T_KW)W^{-1}=(T_KS)q_KS^{-1}=(T_KS)S^{-1}\mathcal{U}_K=(T_K\tilde{S})\tilde{S}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}_K=(T_K\tilde{S})\tilde{q}_K\tilde{S}^{-1}=(T_K\tilde{W})\tilde{W}^{-1} \tag{2.36}$$

de modo que $((T_KS)S^{-1})^{-1}\cdot((T_K\tilde{S})\tilde{S}^{-1})=\mathcal{U}_K\tilde{\mathcal{U}}_K^{-1}$ y concluimos que $(T_KS)S^{-1}=(\mathcal{U}_K\tilde{\mathcal{U}}_K^{-1})_-\in G_-$ y $(T_K\tilde{S})\tilde{S}^{-1}=(\mathcal{U}_K\tilde{\mathcal{U}}_K^{-1})_+\in G_+$ que introducido de nuevo en (2.36) nos da

$$\begin{aligned}(T_KW)W^{-1}=(T_KS)q_KS^{-1}&=(\mathcal{U}_K\tilde{\mathcal{U}}_K^{-1})_-\mathcal{U}_K=\omega_K\\ &=(\mathcal{U}_K\tilde{\mathcal{U}}_K^{-1})_+\tilde{\mathcal{U}}_K=(T_K\tilde{S})\tilde{q}_K\tilde{S}^{-1}=(T_K\tilde{W})\tilde{W}^{-1}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

2. De la definición (2.11) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t_{jk}} &= \Big[\frac{\partial W}{\partial t_{jk}} W^{-1}, L\Big], & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_{jk}} &= \Big[\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{jk}} \tilde{W}^{-1}, \tilde{L}\Big],\\
\frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_{jk}} &= \Big[\frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{jk}} W^{-1}, L\Big], & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}_{jk}} &= \Big[\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{jk}} \tilde{W}^{-1}, \tilde{L}\Big],\\
\frac{\partial C_{kk}}{\partial t_{jk}} &= \Big[\frac{\partial W}{\partial t_{jk}} W^{-1}, C_{kk}\Big], & \frac{\partial \tilde{C}_{kk}}{\partial_{jk}} &= \Big[\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{jk}} \tilde{W}^{-1}, \tilde{C}_{kk}\Big],\\
\frac{\partial C_{kk}}{\partial \tilde{t}_{jk}} &= \Big[\frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{jk}} W^{-1}, C_{kk}\Big], & \frac{\partial \tilde{C}_{kk}}{\partial \tilde{t}_{jk}} &= \Big[\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{jk}} \tilde{W}^{-1}, \tilde{C}_{kk}\Big],\\
T_K L &= ((T_K W)W^{-1})L((T_K W)W^{-1})^{-1}, & T_K \tilde{L} &= ((T_K \tilde{W})\tilde{W}^{-1})\tilde{L}((T_K \tilde{W})\tilde{W}^{-1})^{-1},\\
T_K C_{kk} &= ((T_K W)W^{-1})C_{kk}((T_K W)W^{-1})^{-1}, & T_K \tilde{C}_{kk} &= ((T_K \tilde{W})\tilde{W}^{-1})\tilde{C}_{kk}((T_K \tilde{W})\tilde{W}^{-1})^{-1},
\end{aligned}
$$

y usando (2.26) y (2.27) se obtienen (2.28) y (2.29), respectivamente.

3. La compatibilidad de (2.26) y (2.27) implica (2.30)-(2.32). □

Proposición 2.7. *Las relaciones*

$$(T_{(a,b)}\omega_{(b,c)})\omega_{(a,b)} = (T_{(b,c)}\omega_{(a,b)})\omega_{(b,c)} = \omega_{(a,c)}. \tag{2.38}$$

y las condiciones de compatibilidad (2.32) *son equivalentes.*

Demostración. Sólo es necesario mostrar que (2.38) implica (2.32) ya que la recíproca es evidente. Procedemos como en la prueba de la proposición 2.5

$$
\begin{aligned}
(T_{(a,b)}\omega_{(c,d)})\omega_{(a,b)} &= (T_{(a,b)}(T_{(b,d)}\omega_{(c,b)})\omega_{(b,d)})\omega_{(a,b)}\\
&= (T_{(a,d)}\omega_{(c,b)})(T_{(a,b)}\omega_{(b,d)})\omega_{(a,b)}\\
&= (T_{(a,d)}\omega_{(c,b)})\omega_{(a,d)}\\
&= (T_{(c,b)}\omega_{(a,d)})\omega_{(c,b)}\\
&= (T_{(c,b)}(T_{(b,d)}\omega_{(a,b)})\omega_{(b,d)})\omega_{(c,b)}\\
&= (T_{(c,d)}\omega_{(a,b)})(T_{(c,b)}\omega_{(b,d)})\omega_{(c,b)}\\
&= (T_{(c,d)}\omega_{(a,b)})\omega_{(c,d)}.
\end{aligned}
$$
□

2.2.3. Ecuaciones de Toda multi-componente

Escribimos aquí algunas de las ecuaciones no lineales que aparecen como consecuencia del problema de factorización (2.8). De (2.35) y (2.37), teniendo en cuenta que $S \in G_-$ y que $\tilde{S} \in G_+$, deducimos el siguiente corolario

Corolario 2.8. *Tenemos las expresiones*

$$
\begin{aligned}
B_{1k} &= E_{kk}\Lambda + U_k,\\
\tilde{B}_{1k} &= \tilde{U}_k\Lambda^{-1},\\
\omega_K &:= \pi_a\Lambda + a_K + \tilde{a}_K\Lambda^{-1}, \quad K = (a,b),
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

donde los coeficientes tienen las expresiones alternativas

$$
\begin{aligned}
U_k &:= \beta(n)E_{kk} - E_{kk}\beta(n+1) = \frac{\partial(\mathrm{e}^{\phi(n)})}{\partial t_{1k}}\,\mathrm{e}^{-\phi(n)},\\
\tilde{U}_k &= \mathrm{e}^{\phi(n)}\,E_{kk}\,\mathrm{e}^{-\phi(n-1)} = \frac{\partial\beta(n)}{\partial\tilde{t}_{1k}},\\
a_K &:= \mathbb{I}_N - \pi_a - \pi_b + (T_K\beta(n))\pi_a - \pi_a\beta(n+1) = \begin{cases}\mathrm{e}^{T_K\phi(n)}(\mathbb{I}_N - \tilde{\pi}_b)\,\mathrm{e}^{-\phi(n)}, & a\in\mathbb{S},\\ \mathbb{I}_N - \pi_b, & a\in\tilde{\mathbb{S}},\end{cases}\\
\tilde{a}_K &:= \mathrm{e}^{T_K\phi(n)}\,\tilde{\pi}_a\,\mathrm{e}^{-\phi(n-1)} = \begin{cases}0, & a\in\mathbb{S},\\ (T_K\beta(n))(\mathbb{I}_N-\pi_b) - (\mathbb{I}_N-\pi_b)\beta(n) + \pi_b, & a\in\tilde{\mathbb{S}}.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

De (2.40) deducimos el siguiente conjunto de ecuaciones no lineales con $k\in\mathbb{S}$ y $l\in\tilde{\mathbb{S}}$

$$
\begin{cases}
\beta(n)E_{kk} - E_{kk}\beta(n+1) = \dfrac{\partial(\mathrm{e}^{\phi(n)})}{\partial t_{1k}}\cdot\mathrm{e}^{-\phi(n)},\\
\dfrac{\partial\beta(n)}{\partial\tilde{t}_{1l}} = \mathrm{e}^{\phi(n)}\,E_{ll}\,\mathrm{e}^{-\phi(n-1)},\\
(T_{(k,b)}\beta(n))E_{kk} - E_{kk}\beta(n+1) + \mathbb{I}_N - E_{kk} - \pi_b = \mathrm{e}^{T_{(k,b)}\phi(n)}\cdot(\mathbb{I}_N - \tilde{\pi}_b)\cdot\mathrm{e}^{-\phi(n)},\\
(T_{(l,b)}\beta(n))(\mathbb{I}_N-\pi_b) - (\mathbb{I}_N-\pi_b)\beta(n) + \pi_b = \mathrm{e}^{T_{(l,b)}\phi(n)}\cdot E_{kk}\cdot\mathrm{e}^{-\phi(n-1)}.
\end{cases}
\tag{2.41}
$$

Estas ecuaciones constituyen lo que llamamos ecuaciones de Toda multi-componente.

Observemos que si combinamos las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$
\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_{1l}}\Big(\frac{\partial(\mathrm{e}^{\phi(n)})}{\partial t_{1k}}\,\mathrm{e}^{-\phi(n)}\Big) = \mathrm{e}^{\phi(n)}\,E_{ll}\,\mathrm{e}^{-\phi(n-1)}\,E_{kk} - E_{kk}\,\mathrm{e}^{\phi(n+1)}\,E_{ll}\,\mathrm{e}^{-\phi(n)}
$$

que es la extensión matricial de la ecuación de Toda bidimensional, que aparece para $N=1$:

$$
\frac{\partial^2\phi(n)}{\partial t_1\partial\tilde{t}_1} = \mathrm{e}^{\phi(n)-\phi(n-1)} - \mathrm{e}^{\phi(n+1)-\phi(n)}.
$$

Si en la última ecuación fijamos $b=l'\in\tilde{\mathcal{S}}$ entonces tenemos

$$
\Delta_{(l,l')}\beta(n) = \mathrm{e}^{T_{(l,l')}\phi(n)}\,E_{ll}\,\mathrm{e}^{-\phi(n-1)},
$$

que considerada simultaneamente con la primera nos da

$$
\Delta_{(l,l')}\Big(\frac{\partial(\mathrm{e}^{\phi(n)})}{\partial t_{1k}}\,\mathrm{e}^{-\phi(n)}\Big) = \mathrm{e}^{T_{(l,l')}\phi(n)}\,E_{ll}\,\mathrm{e}^{-\phi(n-1)}\,E_{kk} - E_{kk}\,\mathrm{e}^{T_{(l,l')}\phi(n+1)}\,E_{ll}\,\mathrm{e}^{-\phi(n)},
$$

que es una ecuación mixta de tipo Toda.

Se puede obtener también una ecuación totalmente discreta por ejemplo cuando combinamos las últimas dos ecuaciones, es decir

$$
\Delta_{(l,l')}\big(\mathrm{e}^{T_{(k,b)}\phi(n)}(\mathbb{I}_N-\tilde{\pi}_b)\,\mathrm{e}^{-\phi(n)}\big) = T_{(k,b)}\big(\mathrm{e}^{T_{(l,l')}\phi(n)}\,E_{ll}\,\mathrm{e}^{-\phi(n-1)}\big)E_{kk} - E_{kk}\,\mathrm{e}^{T_{(l,l')}\phi(n+1)}\,E_{ll}\,\mathrm{e}^{-\phi(n)}.
$$

Procediendo de este modo podemos obtener un conjunto de ecuaciones continuas y discretas tipo Toda. Finalmente, observemos que cuando $N=1$ tenemos solo la traslación $T_{(s_1,\tilde{s}_1)}$ que corresponde a la traslación $n\to n+1$.

2.3. Simetrías y reducciones Toeplitz/Hankel por bloques

Para terminar el capítulo consideramos algunas reducciones de la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente. En primer lugar discutimos una extensión de la reducción periódica de [118] y la reducción bigraduada de [30] al caso múltiple, que llamaremos reducción de tipo Toeplitz/Hankel. Finalmente discutimos una extensión de la reducción unidimensional presentada en [118]. Estas reducciones serán relevantes cuando trabajemos en casos semi-infinitos, como se da al estudiar las conexiones de la jerarquía de Toda con las familias de polinomios ortogonales, polinomios ortogonales matriciales y polinomios múltiplemente ortogonales.

Dados dos conjuntos $\{\ell_k\}, \{\tilde{\ell}_k\}, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ buscamos condiciones iniciales g que satisfagan

$$g\Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{-\tilde{\ell}_k}\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{\ell_k}\Big)g. \tag{2.42}$$

La relación (2.42) da lugar a las siguientes ligaduras sobre los operadores de Lax, que en adelante llamaremos *string equations*

$$\sum_{k=1}^{N} C_{kk}L^{\ell_k j} = \sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_{kk}\tilde{L}^{\tilde{\ell}_k j}, \tag{2.43}$$

que se verifican para cualquier $j \in \mathbb{Z}$.

Para estudiar estas reducciones utilizamos los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_\pm &:= \{k \in \{1, 2, \dots, N\} : \pm\ell_k > 0\}, & \mathbb{S}_0 &:= \{k \in \{1, 2, \dots, N\} : \ell_k = 0\}, \\ \tilde{\mathbb{S}}_\pm &:= \{k \in \{1, 2, \dots, N\} : \pm\tilde{\ell}_k > 0\}, & \tilde{\mathbb{S}}_0 &:= \{k \in \{1, 2, \dots, N\} : \tilde{\ell}_k = 0\}, \end{aligned}$$

de modo que $\mathbb{S} = \mathbb{S}_+ \cup \mathbb{S}_0 \cup \mathbb{S}_-$, y $\tilde{\mathbb{S}} = \tilde{\mathbb{S}}_+ \cup \tilde{\mathbb{S}}_0 \cup \tilde{\mathbb{S}}_-$.

Vamos a utilizar primero el siguiente lema

Lema 2.9. *Si se satisface la string equation* (2.43)*, entonces, para cualquier $j > 0$ tenemos que*

$$\begin{aligned} \sum_{k\in(\mathbb{S}_+\cup\mathbb{S}_0)} B_{j\ell_k,k} + \sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_+} \tilde{B}_{j\tilde{\ell}_k,k} &= \sum_{k=1}^{N} C_{kk}L^{\ell_k j} = \sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_{kk}\tilde{L}^{\tilde{\ell}_k j}, \\ \sum_{k\in(\mathbb{S}_-\cup\mathbb{S}_0)} B_{j|\ell_k|,k} + \sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_-} \tilde{B}_{j|\tilde{\ell}_k|,k} &= \sum_{k=1}^{N} C_{kk}L^{-\ell_k j} = \sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_{kk}\tilde{L}^{-\tilde{\ell}_k j}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Demostración. La proyección en $\mathfrak{g}_+$ de $A = \sum_{k=1}^{N} C_{kk}L^{\ell_k j}$, $j > 0$, es $\sum_{k\in(\mathbb{S}_+\cup\mathbb{S}_0)} B_{j\ell_k,k}$ mientras que la proyección en $\mathfrak{g}_-$ de $A = \sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_{kk}\tilde{L}^{\tilde{\ell}_k j}$, $j > 0$, es $\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_+} \tilde{B}_{j\tilde{\ell}_k,k}$. La primera fórmula es simplemente la expresión $A = A_+ + A_-$. La segunda fórmula se obtiene de forma similar cuando $j < 0$. □

Proposición 2.10. *Si se verifica* (2.43)*, tenemos que*

1. *Los operadores de revestimiento satisfacen*

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in(\mathbb{S}_+\cup\mathbb{S}_0)}\frac{\partial W}{\partial t_{j\ell_k,k}}+\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_+}\frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{j\tilde{\ell}_k,k}}&=W\sum_{k=1}^{N}E_{kk}\Lambda^{j\ell_k},\\
\sum_{k\in(\mathbb{S}_+\cup\mathbb{S}_0)}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{j\ell_k,k}}+\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_+}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{j\tilde{\ell}_k,k}}&=\tilde{W}\sum_{k=1}^{N}E_{kk}\Lambda^{-j\tilde{\ell}_k},\\
\sum_{k\in(\mathbb{S}_-\cup\mathbb{S}_0)}\frac{\partial W}{\partial t_{j|\ell_k|,k}}+\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_-}\frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{j|\tilde{\ell}_k|,k}}&=W\sum_{k=1}^{N}E_{kk}\Lambda^{-j\ell_k},\\
\sum_{k\in(\mathbb{S}_-\cup\mathbb{S}_0)}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{j|\ell_k|,k}}+\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_-}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{j|\tilde{\ell}_k|,k}}&=\tilde{W}\sum_{k=1}^{N}E_{kk}\Lambda^{j\tilde{\ell}_k},
\end{aligned}\tag{2.45}$$

   para $j>0$.

2. *Los operadores de Lax presentan las siguientes relaciones de invariancia:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in(\mathbb{S}_+\cup\mathbb{S}_0)}\frac{\partial L}{\partial t_{j\ell_k,k}}+\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_+}\frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_{j\tilde{\ell}_k,k}}=\sum_{k\in(\mathbb{S}_+\cup\mathbb{S}_0)}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_{j\ell_k,k}}+\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_+}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}_{j\tilde{\ell}_k,k}}&=0,\\
\sum_{k\in(\mathbb{S}_-\cup\mathbb{S}_0)}\frac{\partial L}{\partial t_{j|\ell_k|,k}}+\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_-}\frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_{j|\tilde{\ell}_k|,k}}=\sum_{k\in(\mathbb{S}_-\cup\mathbb{S}_0)}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_{j|\ell_k|,k}}+\sum_{k\in\tilde{\mathbb{S}}_-}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}_{j|\tilde{\ell}_k|,k}}&=0,
\end{aligned}\tag{2.46}$$

   donde $j>0$.

Además, si

$$\sum_{k=1}^{N}(\ell_k+\tilde{\ell}_k)=0,$$

entonces,

1. *Los operadores de revestimiento verifican*

$$\begin{aligned}
W(s_1+\ell_1,\dots,s_N+\ell_N,\tilde{s}_1+\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{s}_N+\tilde{\ell}_N)&=W(s_1,\dots,s_N,\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_N)\sum_{k=1}^{N}E_{kk}\Lambda^{\ell_k},\\
\tilde{W}(s_1+\ell_1,\dots,s_N+\ell_N,\tilde{s}_1+\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{s}_N+\tilde{\ell}_N)&=\tilde{W}(s_1,\dots,s_N,\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_N)\sum_{k=1}^{N}E_{kk}\Lambda^{-\tilde{\ell}_k}.
\end{aligned}\tag{2.47}$$

2. *Los operadores de Lax son periódicos*

$$\begin{aligned}
L(s_1+\ell_1,\dots,s_N+\ell_N,\tilde{s}_1+\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{s}_N+\tilde{\ell}_N)&=L(s_1,\dots,s_N,\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_N),\\
\tilde{L}(s_1+\ell_1,\dots,s_N+\ell_N,\tilde{s}_1+\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{s}_N+\tilde{\ell}_N)&=\tilde{L}(s_1,\dots,s_N,\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_N).
\end{aligned}\tag{2.48}$$

Demostración. Las ecuaciones (2.45) y (2.46) se siguen del lema anterior y del Teorema 2.6. Para deducir (2.47) y (2.48) procedemos como sigue. Si

$$\sum_{k=1}^{N}\ell_k+\sum_{k=1}^{N}\tilde{\ell}_k=0,$$

la periodicidad se sigue de la factorización

$$SW_0\Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{\ell_k}\Big)g = SW_0 g\Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{-\tilde{\ell}_k}\Big) = \tilde{S}\tilde{W}_0\Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{-\tilde{\ell}_k}\Big)$$

observando que

$$\begin{aligned} W_0(s_1+\ell_1,\dots,s_N+\ell_N) &= W_0(s_1,\dots,s_N)\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{\ell_k},\\ \tilde{W}_0(\tilde{s}_1+\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{s}_N+\tilde{\ell}_N) &= \tilde{W}_0(\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_N)\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{-\tilde{\ell}_k}, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la propiedad de unicidad del problema de factorización deducimos las condiciones periódicas para las soluciones

$$\begin{aligned} S(s_1+\ell_1,\dots,s_N+\ell_N,\tilde{s}_1+\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{s}_N+\tilde{\ell}_N) &= S(s_1,\dots,s_N,\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_N),\\ \tilde{S}(s_1+\ell_1,\dots,s_N+\ell_N,\tilde{s}_1+\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{s}_N+\tilde{\ell}_N) &= \tilde{S}(s_1,\dots,s_N,\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_N), \end{aligned}$$

que implican (2.47) y (2.48). □

Ahora justificamos el nombre dado a esta reducción. Si escribimos $g = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j(n)\Lambda^j$, y pensamos en esta condición como un elemento de $M_N(M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}))$, es decir $g = \sum_{k_1,k_2=1}^{N} g_{k_1k_2}E_{k_1k_2}$ y $g_{k_1k_2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{j,k_1k_2}(n)\Lambda^j$ entonces (2.42) da como resultado

$$g_{j,k_1k_2}(n) = g_{j+\ell_{k_1}+\tilde{\ell}_{k_2},k_1k_2}(n-\ell_{k_1}). \tag{2.49}$$

Si $\ell_{k_1}+\tilde{\ell}_{k_2}=0$, entonces g_{j,k_1k_2} es una función $|\ell_{k_1}|$-periódica en n. Si el periodo es 1, obtenemos que $g_{k_1k_2}$ es una matriz doblemente infinita tipo Toeplitz. En el caso general trataremos con matrices tipo Toeplitz por bloques y tipo Hankel por bloques doblemente infinitas.

Definición 2.11. Dada una matriz por bloques $\Omega = (\Omega_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ compuesta de bloques $p\times q$ $\Omega_{i,j}$ decimos que Ω es una matriz Toeplitz por bloques si $\Omega_{i+1,j+1} = \Omega_{i,j}$ y una matriz Hankel por bloques si $\Omega_{i+1,j-1} = \Omega_{i,j}$.

Proposición 2.12. *La condición* (2.49) *implica para $g_{k_1k_2}$ que*

- *Para $\ell_{k_1}\tilde{\ell}_{k_2} > 0$ es una matriz doblemente infinita tipo Hankel por bloques $|\ell_{k_1}|\times|\tilde{\ell}_{k_2}|$.*
- *Para $\ell_{k_1}\tilde{\ell}_{k_2} < 0$ es una matriz doblemente infinita tipo Toeplitz por bloques tipo $|\ell_{k_1}|\times|\tilde{\ell}_{k_2}|$.*
- *Para $\ell_{k_1}=0$ con $\tilde{\ell}_{k_2}\neq 0$ tenemos una estructura diagonal por bandas con anchura $|\tilde{\ell}_{k_2}|$, y para $\tilde{\ell}_{k_2}=0$ con $\ell_{k_1}\neq 0$ una matriz doblemente infinita por bloques $|\ell_{k_1}|\times|\ell_{k_1}|$.*

Demostración. Llamemos a_{ij} al conjunto de los elementos de la matriz doblemente infinita $g_{k_1k_2}$, analizamos ahora el significado de (2.49) en distintas situaciones:

- **Caso Hankel por bloques**: Suponemos aquí que $\ell_{k_1}\tilde{\ell}_{k_2} > 0$. En particular discutimos el caso en el que ambos enteros son positivos. Si empezamos por el elemento a_{ij} la ecuación (2.49) indica que es igual a otro elemento. Para determinar la posición de este otro elemento en la matriz observamos que (2.49) requiere moverse en la fila i-ésima $\ell_{k_1}+\tilde{\ell}_{k_2}$ posiciones hacia la derecha y en la diagonal que pasa por esa posición moverse hacia la izquierda ℓ_{k_1} posiciones en esa diagonal, es decir subir ℓ_{k_1} posiciones y a la izquierda también ℓ_{k_1} posiciones. Eso nos da una estructura por bloques sobre las antidiagonales que se corresponde con una estructura de tipo Hankel.

  Para enteros negativos $\ell_{k_1}, \tilde{\ell}_{k_2} < 0$ la discusión es parecida, reemplazando los movimientos en la fila hacia la derecha con movimientos hacia la izquierda y los movimientos hacia arriba de la diagonal con movimientos hacia abajo, de modo que tenemos la misma estructura Hankel por bloques.

- **Caso Toeplitz por bloques**: Ahora suponemos que $\ell_{k_1}\tilde{\ell}_{k_2} < 0$. Suponemos que ℓ_{k_1} es positivo. Entonces, si $\ell_{k_1} > |\tilde{\ell}_{k_2}|$ si empezamos por el elemento a_{ij} la ecuación (2.49) indica que este elemento es igual a otro, por ejemplo $a_{i'j'}$. Para determinar la fila i' y la columna j', observamos que (2.49) nos indica avanzar en la fila i-ésima $\ell_{k_1}-|\tilde{\ell}_{k_2}|$ posiciones a la derecha y en la diagonal que pasa por esa posición ir a la izquierda ℓ_{k_1} posiciones en esa diagonal, es decir, subir ℓ_{k_1} posiciones y desplazarse a la izquierda también ℓ_{k_1} posiciones. De este modo tenemos

$$a_{ij} = a_{i-\ell_{k_1}, j+\ell_{k_1}-|\tilde{\ell}_{k_2}|-\ell_{k_1}} = a_{i-\ell_{k_1}, j-|\tilde{\ell}_{k_2}|}.$$

  Para el caso $\ell_{k_1} < |\tilde{\ell}_{k_2}|$ utilizamos $g_{j,k_1k_2}(n) = g_{j+|\tilde{\ell}_{k_2}|-\ell_{k_1},k_1k_2}(n+\ell_{k_1})$ de modo que nos movemos $|\tilde{\ell}_{k_2}|-\ell_{k_1}$ posiciones a la derecha y en la diagonal ℓ_{k_1} posiciones hacia abajo, lo que suma ℓ_{k_1} filas hacia abajo y ℓ_{k_1} columnas a la derecha, es decir

$$a_{ij} = a_{i+\ell_{k_1}, j+|\tilde{\ell}_{\tilde{k}_2}|-\ell_{k_1}+\ell_{k_1}} = a_{i+\ell_{k_1}, j+|\tilde{\ell}_{k_2}|}$$

  y obtenemos el mismo resultado, lo que inmediatamente nos indica que la estructura de bloques sobre las diagonales corresponde a una matriz de tipo Toeplitz por bloques.

  Se puede discutir de forma similar el caso de ℓ_{k_1} negativo y positivo $\tilde{\ell}_{k_2}$.

- El caso $\ell_{k_1} = 0$ con $\tilde{\ell}_{k_2} \neq 0$ da $g_{j,k_1k_2}(n) = g_{j+\tilde{\ell}_{k_2},k_1k_2}(n)$, que implica una estructura periódica en las bandas diagonales, mientras que $\tilde{\ell}_{k_2} = 0$ con $\ell_{k_1} \neq 0$ da $g_{j,k_1k_2}(n) = g_{j+\ell_{k_1},k_1k_2}(n+\ell_{k_1})$, que describe una estructura por bloques $\ell_{k_1} \times \ell_{k_1}$. □

Esta estructura Toeplitz/Hankel por bloques no sólo aparece en la estructura de $g_{k_1k_2}$ sino también en la estructura de g en sí misma, pensada como un elemento de $M_{\mathbb{Z}}(M_N(\mathbb{C}))$; por ejemplo, si cogemos $\ell_k = -\tilde{\ell}_k = 1$, $k = 1, \dots, N$ obtenemos una matriz Toeplitz doblemente infinita por bloques $N \times N$, mientras que para $\ell_k = \tilde{\ell}_k = 1$, $k = 1, \dots, N$ obtenemos una matriz Hankel doblemente infinita por bloques $N \times N$.

Para el caso particular $\ell_k = \tilde{\ell}_k$, $k = 1, \dots, N$, tenemos que g es una matriz doblemente infinita por bloques y

$$g\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{-\ell_k} = \sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{\ell_k} g, \qquad g\sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{\ell_k} = \sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{-\ell_k} g.$$

De estas dos condiciones equivalentes para g concluimos para g^2 la siguiente restricción

$$g^2 \sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{\ell_k} = \sum_{k=1}^{N} E_{kk}\Lambda^{\ell_k} g^2,$$

es decir, g^2 es una matriz doblemente infinita Toeplitz por bloques y la solución para la condición g^2 es de tipo periódico con periodos que satisfacen para cada componente: $\tilde{\ell}_k = -\ell_k$, $k = 1,\dots,N$.

Para el caso de una componente tenemos la condición

$$L^{\ell_1} = \tilde{L}^{\tilde{\ell}_1}. \tag{2.50}$$

Si $\ell_1 + \tilde{\ell}_1 = 0$ podemos elegir $\ell_1 = \ell \in \mathbb{N}$ y $\tilde{\ell}_1 = -\ell$ y la restricción para g es $g\Lambda^\ell = \Lambda^\ell g$ que lleva a $L^\ell = \tilde{L}^{-\ell}$, es decir, la reducción ℓ-periódica de la jerarquía de Toda bidimensional de una componente [118]. Cuando $\ell_1, \tilde{\ell}_1 > 0$ son dos enteros no negativos esta condición (2.50) da como resultado la reducción de una componente de la jerarquía de Toda bidimensional en la que es posible considerar flujos adicionales descrita en [30], con el nombre de bigraduada. Por eso llamaremos a esta reducción reducción multigraduada cuando todos los $\ell_k, \tilde{\ell}_k$ son positivos. Hay que destacar que esta restricción multigraduada sobre g no es de tipo periódico y $\mathbb{S} = \mathbb{S}_+$ además de $\tilde{\mathbb{S}} = \tilde{\mathbb{S}}_+$.

Reducción unidimensional y generalizaciones Dado un conjunto de enteros no negativos que viene dado por $\{\ell_k, \tilde{\ell}_k\}_{k\in\{1,\dots,\mathbb{N}\}}$ pedimos a g en (2.8) la siguiente restricción

$$g\Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}(\Lambda^{\tilde{\ell}_k} + \Lambda^{-\tilde{\ell}_k})\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}(\Lambda^{\ell_k} + \Lambda^{-\ell_k})\Big)g.$$

Ahora, ya que $z^j + z^{-j} = (z+z^{-1})^j + a_{j,j-2}(z+z^{-1})^{j-2} + \cdots + a_{j,0}$, para algún $a_{j,i} \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$g \cdot \Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}(\Lambda^{j\tilde{\ell}_k} + \Lambda^{-j\tilde{\ell}_k})\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}(\Lambda^{j\ell_k} + \Lambda^{-j\ell_k})\Big)g$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{N} C_{kk}(L^{j\ell_k} + L^{-j\ell_k}) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_{kk}(\tilde{L}^{j\ell_{\tilde{k}}} + \tilde{L}^{-j\ell_{\tilde{k}}})$$

se verifica para cualquier $j \geq 0$.

De aquí concluimos que

$$\sum_{k=1}^{N}(B_{j\ell_k,k} + \tilde{B}_{j\tilde{\ell}_k,k}) = \sum_{k=1}^{N} C_{kk}(L^{j\ell_k} + L^{-j\ell_k}) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_{kk}(\tilde{L}^{j\ell_{\tilde{k}}} + \tilde{L}^{-j\ell_{\tilde{k}}})$$

y por lo tanto deducimos la invariancia

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\partial L}{\partial t_{j\ell_k,k}} + \frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_{j\tilde{\ell}_k,k}}\Big) = \sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_{j\ell_k,k}} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}_{j\tilde{\ell}_k,k}}\Big) = 0. \tag{2.51}$$

En el caso de una componente si elegimos $\ell_1 = \tilde{\ell}_1 = 1$ obtenemos la invariancia bajo $\frac{\partial}{\partial t_{j1}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{j1}}$, $j > 0$. Esta es la reducción unidimensional discutida en [118].

Capítulo 3

Polinomios matriciales en la jerarquía de Toda

Como comentamos en la introducción, en este capítulo se tratan de adaptar los resultados obtenidos en el capítulo 2 al caso de los polinomios ortogonales matriciales. En la sección 3.1 se construyen familias de polinomios matriciales a partir de una factorización gaussiana. En la sección 3.2 se analiza el caso Hankel multigraduado, que dará lugar a la conexión de los polinomios matriciales con polinomios de tipo múltiplemente ortogonal y al estudio de determinados problemas de Riemann-Hilbert, ofreciendo una solución al error presente en [4]. En la sección 3.3 se introduce una técnica para construir fórmulas de Christoffel-Darboux y generalizaciones apropiadas para los polinomios estudiados. Finalmente, en la sección 3.4 conectamos los resultados obtenidos en el capítulo 2 con estas soluciones particulares asociadas a polinomios ortogonales. Los resultados presentes en este capítulo, tal y como hemos comentado en la introducción fueron publicados en Inverse Problems [8] a excepción de la sección 3.3, que se realizó con posterioridad y que ha constituido un trabajo [11] enviado a *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

3.1. Polinomios bi-ortogonales matriciales y matrices de momentos

3.1.1. El problema de factorización en el caso semi-infinito

En primer lugar vamos a fijar las bases teóricas para la construcción de la jerarquía semi-infinita de Toda en términos de grupos de Lie al igual que se hizo en el capítulo 2 para el caso doblemente infinito. Llamaremos Λ al operador de desplazamiento para sucesiones matriciales. A diferencia del capítulo 2 donde se consideraban sucesiones matriciales en el dominio $\mathbb{Z}$, que daba lugar a matrices por bloques doblemente infinitas, aquí nos limitaremos a considerar sucesiones de $\mathbb{Z}^+$ a matrices complejas, es decir, matrices infinitas por bloques. El álgebra asociativa de operadores lineales sobre estas sucesiones se puede identificar con el álgebra asociativa de matrices semi-infinitas con entradas en $\mathbb{C}^{N\times N}$. Con la definición usual del conmutador para operadores lineales esta álgebra es también un álgebra de Lie que llamaremos $\mathfrak{g}$ cuyo grupo de Lie G es el grupo de operadores invertibles de $\mathfrak{g}$.

Tomemos un elemento $g \in G$ y consideremos el siguiente problema de factorización gaussiana $g = S^{-1}\tilde{S}$ donde S es una matriz triangular inferior por bloques, con $S_{ii} = \mathbb{I}_N$, y tal que $\mathbb{I}_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ es la matriz identidad, y $\tilde{S}$ es una matriz triangular superior por bloques. En [48] se demuestra que este tipo de factorización se puede hacer si todos los menores principales no se anulan. Esto sugiere que la factorización inicial se puede mantener bajo “pequeñas” deformaciones continuas, que conduce a una versión dinámica de la misma $g(t) = S(t)^{-1}\tilde{S}(t)$ donde t es un conjunto de variables complejas. Tal y como se discutió en [87] (y que se ha presentado de forma abreviada en el capítulo 2) esta factorización conduce a una jerarquía integrable de ecuaciones en derivadas parciales no lineales conocida como la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente.

Si $E_{jk},\ j,k = 1,\dots,N$ es la base canónica de $\mathbb{C}^{N\times N}$ la matriz asociada al operador de desplazamiento “hacia delante” es la matriz por bloques $(\mathbb{I}_N\delta_{i,i+1})$,mientras que $\Lambda^\top$ es el operador asociado a la matriz traspuesta que traslada “hacia atrás” (representado por la matriz $(\mathbb{I}_N\delta_{i+1,i})$). A diferencia del caso doblemente infinito aquí no tenemos un Λ^{-1}, ya que la traslación carece de inverso.

3.1.2. Construcción de polinomios matriciales

Siguiendo los trabajos realizados por M. Adler y P. van Moerbeke para el caso escalar, construimos familias de polinomios ortogonales matriciales y polinomios bi-ortogonales matriciales a partir de una matriz semi-infinita g que admita una factorización de Gauss o LU, es decir $g = S^{-1}\tilde{S}$.

Como primer paso definimos las siguientes familias de polinomios matriciales.

Definición 3.1.

$$p(z) = \{p_i(z)\}_{i\geq 0} := S\chi(z), \qquad \tilde{p}(z) = \{\tilde{p}_i(z)\}_{i\geq 0} := (\tilde{S}^{-1})^\dagger\chi(z), \tag{3.1}$$

donde $\chi(z) := (\mathbb{I}_N, z\mathbb{I}_N, z^2\mathbb{I}_N,\dots)^\top$ y el símbolo † indica la conjugación hermítica.

A continuación consideremos una aplicación sesquilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ cuyas entradas sean polinomios matriciales. Dados dos polinomios $P(z) = \sum_{k=0}^{i} P_k z^k$ y $Q(z) = \sum_{l=0}^{j} Q_l z^l$ (de grados i, j, respectivamente) tenemos que el carácter bilineal obliga a que la aplicación tenga la siguiente forma

$$\langle P(z), Q(z)\rangle = \sum_{\substack{k=1,\dots,i\\ l=1,\dots,j}} P_k\langle z^k\mathbb{I}_N, z^l\mathbb{I}_N\rangle Q_l^\dagger,$$

donde $\langle z^k\mathbb{I}_N, z^l\mathbb{I}_N\rangle$ denota la matriz de dicha aplicación en la base canónica. Por lo tanto, para cada (k,l) tenemos que $\langle z^k\mathbb{I}_N, z^l\mathbb{I}_N\rangle$ es una matriz compleja $N\times N$.

Esta aplicación tiene las siguientes propiedades que definen a una forma sesquilineal, pero teniendo en cuenta que sus entradas son matrices

1. Es lineal en la primera componente:

$$\langle c_1P_1(z) + c_2P_2(z), Q(z)\rangle = c_1\langle P_1(z), Q(z)\rangle + c_2\langle P_2(z), Q(z)\rangle, \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}^{N\times N}.$$

2. Es antilineal en la segunda componente:

$$\langle P(z), c_1Q_1(z) + c_2Q_2(z)\rangle = \langle P(z), Q_1(z)\rangle c_1^\dagger + \langle P(z), Q_2(z)\rangle c_2^\dagger, \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}^{N\times N}.$$

Proposición 3.2. *1. Si $\langle z^i\mathbb{I}_N, z^j\mathbb{I}_N\rangle = g_{ij}$ donde g_{ij} es el bloque de g en la posición (i,j), entonces las familias $p(z)$ y $\tilde{p}(z)$ son familias bi-ortogonales matriciales para la aplicación sesquilineal, es decir*

$$\langle p_i(z), \tilde{p}_j(z)\rangle = \delta_{ij}\mathbb{I}_N. \tag{3.2}$$

Además, se verifican las siguientes ecuaciones que en adelante llamaremos relaciones de ortogonalidad

$$\langle p_i(z), z^l\mathbb{I}_N\rangle = 0, \quad l = 0,\dots,i-1, \quad \langle z^l\mathbb{I}_N, \tilde{p}_j(z)\rangle = 0, \quad l = 0,\dots,j-1. \tag{3.3}$$

2. Si la matriz g es hermítica entonces $p(z)$ y $\tilde{p}(z)$ son dos familias de polinomios ortogonales matriciales, además las dos familias son proporcionales.

Demostración. 1. Con las definiciones anteriores para $p(z)$ y $\tilde{p}(z)$ tenemos:

$$p_i(z) = \sum_{k=0}^{i} S_{ik}z^k, \qquad \tilde{p}_j(z) = \sum_{l=0}^{j}(\tilde{S}^{-1}_{lj})^\dagger z^l,$$

donde S_{ik} y $\tilde{S}^{-1}_{lj}$ son bloques (i,k) y (l,j) para S y $\tilde{S}^{-1}$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\langle p_i(z), \tilde{p}_j(z)\rangle &= \sum_{k,l=0}^{i,j} S_{ik}\langle z^k\mathbb{I}_N, z^l\mathbb{I}_N\rangle\tilde{S}^{-1}_{lj} = \sum_{k,l\geq 0} S_{ik}\langle z^k\mathbb{I}_N, z^l\mathbb{I}_N\rangle\tilde{S}^{-1}_{lj}\\ &= (Sg\tilde{S}^{-1})_{ij} = (SS^{-1}\tilde{S}\tilde{S}^{-1})_{ij} = \delta_{ij}\mathbb{I}_N,\end{aligned}$$

tal y como queríamos probar.

Las relaciones de ortogonalidad (3.3) se prueban por inducción. En primer lugar tenemos que $\langle p_i(z), \tilde{p}_0(z)\rangle = 0$, pero $p_0(z) = (\tilde{S}^{-1}_{00})^\dagger$ es invertible y por lo tanto concluimos que $\langle p_i(z), \mathbb{I}_N\rangle = 0$. Ahora, $\langle p_i(z), \tilde{p}_1(z)\rangle = 0$, pero $\tilde{p}_1(z) = (\tilde{S}^{-1}_{11})^\dagger z + (\tilde{S}^{-1}_{01})^\dagger$, y usando la antilinealidad, el resultado anterior y el hecho de que $(\tilde{S}^{-1}_{11})^\dagger$ es invertible deducimos que $\langle p_i(z), z\mathbb{I}_N\rangle = 0$. De este modo procedemos sucesivamente.

2. Estudiemos las condiciones bajo las que $p(z)$ es una familia de polinomios ortogonales matriciales. Si tomamos dos polinomios de la familia, como $p_i(z) = \sum_{k=1}^{i} S_{ik}z^k$ y $p_j(z) = \sum_{l=1}^{j} S_{jl}z^l$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle p_i(z), p_j(z)\rangle &= \sum_{k,l=1}^{i,j} S_{ik}\langle z^k I, z^l I\rangle (S_{jl})^\dagger = \sum_{k,l=0}^{\infty} S_{ik}\langle z^k\mathbb{I}_N, z^l\mathbb{I}_N\rangle (S^\dagger)_{lj}\\ &= (SS^\dagger)_{ij} = (\tilde{S}S^\dagger)_{ij}.\end{aligned}$$

Por construcción $\tilde{S}S^\dagger$ es triangular superior por bloques y su conjugada hermítica es

$$(\tilde{S}S^\dagger)^\dagger = S\tilde{S}^\dagger = S(Sg)^\dagger = Sg^\dagger S^\dagger = SgS^\dagger = \tilde{S}S^\dagger,$$

consecuentemente $\tilde{S}S^\dagger$ es hermítica y triangular superior por bloques, lo que implica que $\tilde{S}S^\dagger$ es una matriz diagonal por bloques. Además los bloques diagonales son matrices complejas hermíticas $N\times N$. De ahí concluimos que $\langle p_i(z), p_j(z)\rangle = \delta_{ij}h_i$, (con h_i hermítica) y que $p(z) = h\tilde{p}(z)$, donde $h = \operatorname{diag}(h_1, h_2, \dots)$. $\square$

3.1.3. El caso Hankel

Vamos a tomar el caso particular de g como una matriz que verifica una simetría Hankel por bloques, es decir $\Lambda g = g\Lambda^\top$ o expresado en componentes

$$(\Lambda g)_{ij} = g_{i+1,j} = g_{i,j+1} = (g\Lambda^\top)_{ij}. \tag{3.4}$$

En este caso tenemos para los bloques de la matriz g la estructura

$$g_{ij} = \mu^{(i+j)}, \tag{3.5}$$

para ciertas matrices $\mu^{(j)} \in \mathbb{C}^{N\times N}$.

Proposición 3.3. *Supongamos que g es una matriz de tipo Hankel por bloques. Si llamamos $\mu^{(j)}$ a una determinada matriz de momentos por bloques, (es decir $\mu^{(j)} = \int_{\mathbb{R}} x^j \rho(x)dx$) entonces la aplicación sesquilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar en la recta cuya matriz de momentos es g, es decir,*

$$\langle P(x), Q(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x)\rho(x)Q(x)^\dagger dx. \tag{3.6}$$

Demostración. Por una parte tenemos que $\langle P(x), Q(x)\rangle = \sum_{ij} P_i\mu^{(i+j)}Q_j^\dagger$. Usando la definición anterior $\int_{\mathbb{R}} x^{j+k}\rho(x)dx = \langle x^j\mathbb{I}_N, x^k\mathbb{I}_N\rangle = \mu^{(j+k)}$ (la simetría Hankel asegura que solo hay dependencia en $j+k$) y tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\langle P(x), Q(x)\rangle &= \sum_{ij} P_i\mu^{(i+j)}Q_j^\dagger = \sum_{ij} P_i \int_{\mathbb{R}} x^{j+k}\rho(x)dxQ_j^\dagger \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(x)\rho(x)Q(x)^\dagger dx.\end{aligned}$$

□

3.1.4. Fórmulas de recurrencia

Vamos a ver como las relaciones clásicas de recurrencia a 3 términos para polinomios ortogonales se pueden obtener como una consecuencia de las simetrías de tipo Hankel. Para ello aplicamos el procedimiento de revestimiento usado en el capítulo 2 para obtener los llamados operadores de Jacobi

Definición 3.4. Mediante el proceso de revestimiento definimos los operadores $J, \tilde{J}$ como sigue

$$J := S\Lambda S^{-1}, \qquad \tilde{J} := \tilde{S}\Lambda^\top\tilde{S}^{-1}, \tag{3.7}$$

estos operadores permiten construir las relaciones de recurrencia

Proposición 3.5. *1. Ambos operadores de Jacobi son iguales, es decir $J = \tilde{J}$.*

2. J es una matriz tridiagonal por bloques, es decir, para ciertas matrices u, v se verifica que

$$J = \Lambda + u + v\Lambda^\top. \tag{3.8}$$

3. Se verifican la siguientes propiedades de tipo espectral

$$Jp(z) = zp(z), \qquad \tilde{J}^\dagger\tilde{p}(z) = z\tilde{p}(z). \tag{3.9}$$

4. *Las sucesiones de polinomios $p_n(z), \tilde{p}_n(z)$ satisfacen una relación de recurrencia a tres términos dada por*

$$\begin{aligned} zp_n(z) &= p_{n+1}(z) + u(n)p_n(z) + v(n)p_{n-1}(z), \\ z\tilde{p}_n(z) &= v^\dagger(n+1)\tilde{p}_{n+1}(z) + u^\dagger(n)\tilde{p}_n(z) + \tilde{p}_{n-1}(z). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Demostración. Para el primer apartado necesitamos la factorización de Gauss y la condición (3.4)

$$J = S\Lambda S^{-1} = \tilde{S}\tilde{S}^{-1}S\Lambda S^{-1}\tilde{S}\tilde{S}^{-1} = \tilde{S}\tilde{S}^{-1}S\Lambda g\tilde{S}^{-1} = \tilde{S}\tilde{S}^{-1}Sg\Lambda^\top\tilde{S}^{-1} = \tilde{S}\Lambda^\top\tilde{S}^{-1} = \tilde{J}.$$

El segundo apartado se deduce del hecho de que J es por construcción una matriz por bloques que se anula por encima de la primera diagonal superior, mientras que $\tilde{J}$ es una matriz cuyos bloques se anulan por debajo de la primera diagonal inferior. De la igualdad de ambas matrices deducimos que la matriz $J = \tilde{J}$ es tridiagonal y por lo tanto el enunciado es cierto.

El tercer apartado se deduce de las definiciones de J, p y $\tilde{p}$ de forma que

$$\begin{aligned} Jp(z) &= S\Lambda S^{-1}S\chi(z) = S\Lambda\chi(z) = zp(z), \\ \tilde{J}^\dagger\tilde{p}(z) &= (\tilde{S}^{-1})^\dagger\Lambda\tilde{S}^\dagger(\tilde{S}^{-1})^\dagger\chi(z) = (\tilde{S}^{-1})^\dagger\Lambda\chi(z) = z\tilde{p}(z). \end{aligned}$$

Para el cuarto apartado, aplicamos las propiedades anteriores a la sucesión de polinomios $p_n(z)$ de modo que sabemos que existen sucesiones de matrices $u(n), v(n)$ tales que

$$zp_n(z) = Jp_n(z) = (\Lambda + u(n) + v(n)\Lambda^\top)p_n(z) = p_{n+1}(z) + u(n)p_n(z) + v(n)p_{n-1},$$

y aplicando la misma idea obtenemos la fórmula para los $\tilde{p}_n(z)$. □

3.2. Simetrías de tipo Hankel multigraduadas

Dado un multi-índice $\vec{n} = (n_1, \dots, n_N)$ con n_a enteros no negativos definimos para $A \in \mathfrak{g}$ la potencia $A^{\vec{n}} = \sum_{a=1}^N A^{n_a}E_{aa}$.

Definición 3.6. Para dos multi-índices $\vec{n}$ y $\vec{m}$ decimos que una matriz g es de tipo Hankel multigraduada $(\vec{n}, \vec{m})$ si

$$\Lambda^{\vec{n}}g = g(\Lambda^\top)^{\vec{m}}. \tag{3.11}$$

Si volvemos a considerar que g_{ij} denota un bloque de g podemos escribir de forma extendida $g_{ij} = (g_{ij,ab})_{1\leq a,b\leq N}$. Con esta notación la condición de Hankel multigraduada se escribe como $g_{i+n_a\, j,ab} = g_{i\, j+m_b,ab}$.

Se puede construir una familia de matrices que presenten esa simetría Hankel multigraduada a partir de una familia de pesos matriciales $\rho_{j,ab}$ a la que asociamos la siguiente matriz de momentos

$$g_{ij,ab} = \int_{\mathbb{R}} x^i\rho_{j,ab}(x)dx, \tag{3.12}$$

donde los pesos satisfacen la condición de periodicidad generalizada del tipo

$$\rho_{j+m_b,ab}(x) = x^{n_a}\rho_{j,ab}(x). \tag{3.13}$$

Dados los pesos $\rho_{0,ab},\dots,\rho_{m_b-1,ab}$, todos los demás están fijados por (3.13). Este tipo de estructura para los pesos del problema de ortogonalidad ya se estudió en [4] para el caso particular de una componente ($N=1$) y además con $n_1=m_1$.

Proposición 3.7. *Supongamos que la matriz de momentos g con una simetría de tipo Hankel multigraduada admite una representación en términos de un conjunto de pesos matriciales $\{\rho_{j,ab}\}$ establecidos en las ecuaciones* (3.12) *y* (3.13)*.*

1. *Los polinomios matriciales p_i asociados a dicha matriz de momentos satisfacen las siguientes condiciones generalizadas de ortogonalidad*

$$\int_{\mathbb{R}} p_i(x)\rho_j(x)dx=0, \qquad j=0,\dots,i-1, \qquad \rho_j:=(\rho_{j,ab})\in\mathbb{C}^{N\times N}. \tag{3.14}$$

2. *Usando la división euclídea $i=\theta_c m_c+\sigma_c$, con $\theta_c\geq 0$, y $0\leq\sigma_c<m_c$ se puede obtener una versión alternativa de* (3.14)*. En este caso para $a,c=1,\dots,N$ tenemos que*

$$\begin{aligned}&\sum_{b=1}^{N}\int_{\mathbb{R}} p_{i,ab}(x)\rho_{j,bc}(x)(x^{n_b})^l dx=0, \quad j=0,\dots,m_c-1, \quad l=0,\dots,\theta_c-1,\\ &\sum_{b=1}^{N}\int_{\mathbb{R}} p_{i,ab}(x)\rho_{j,bc}(x)(x^{n_b})^{\theta_c} dx=0, \quad j=0,\dots,\sigma_c-1.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Demostración. De $Sg\tilde{S}^{-1}=1_G$ obtenemos $\sum_{j=1}^{i}\sum_{b=1}^{N}p_{ij,ab}g_{jl,bc}=0$ para $a,c=1,\dots,N$ y $l=0,\dots,i-1$. Teniendo en cuenta la estructura de la matriz de momentos definida en (3.12) obtenemos el resultado deseado tanto para (3.14) como para (3.15). □

La forma (3.15) de las relaciones generalizadas de ortogonalidad sugieren una conexión entre la ortogonalidad matricial generalizada y la ortogonalidad múltiple. Estas conexiones se exploran en el siguiente apartado.

3.2.1. Relación con los polinomios múltiplemente ortogonales

Aunque estudiaremos con más detalle estas conexiones en el capítulo 4, ya en este punto aparecen relaciones con la ortogonalidad múltiple. Cuando los pesos ρ_j son unas determinadas matrices de rango 1 se puede establecer una conexión con determinadas familias de polinomios múltiplemente ortogonales mixtos.

Siguiendo la notación empleada en [38] tomamos dos multi-índices $\vec{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_p)$, $\vec{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_q)$ de enteros no negativos y utilizamos el convenio habitual de llamar a $|\vec{\nu}|=\sum_{J=1}^{p}\nu_J$ y a $|\vec{\mu}|=\sum_{K=1}^{q}\mu_K$. También tomamos dos conjuntos de pesos $\{w_{1J}\}_{J=1}^{p}$ y $\{w_{2K}\}_{K=1}^{q}$ que son funciones integrables no negativas en el eje real.

Definición 3.8. Dado un par $(\vec{\nu},\vec{\mu})$ decimos que $\{A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J}\}_{J=1,\dots,p}$ es un conjunto de polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto si $\deg A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J}\leq\nu_J-1$ y además se satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{J=1}^{p}A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J}(x)w_{1J}(x)w_{2K}(x)x^{\alpha}dx=0, \qquad \alpha=0,\dots,\mu_K-1, \qquad K=1,\dots,q. \tag{3.16}$$

Alternativamente, si se definen las siguientes formas lineales $Q_{\vec{\nu},\vec{\mu}}(x) := \sum_{J=1}^{n} A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J}(x)w_{1J}(x)$ las condiciones de ortogonalidad (3.16) se pueden escribir como

$$\int_{\mathbb{R}} Q_{\vec{\nu},\vec{\mu}}(x)w_{2K}(x)x^{\alpha}dx = 0, \qquad \alpha = 0,\dots,\mu_K - 1, \qquad K = 1,\dots,q. \tag{3.17}$$

Para garantizar la existencia y unicidad de solución para las relaciones de ortogonalidad se suelen exigir unas condiciones de normalización. Vamos a suponer que $|\vec{\nu}| = |\vec{\mu}|$ y que se verifican las siguientes condiciones, que llamaremos condiciones de normalización

1. Para cada $K = 1,\dots,p$ las relaciones de ortogonalidad para los multi-índices $(\vec{\nu} + \vec{e}_K, \vec{\mu})$ tienen solución única con $A_{\vec{\nu},\vec{\mu},K}$ mónico y $\deg A_{\vec{\nu},\vec{\mu},K} = \nu_K - 1$, además $\deg A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J} < \nu_J - 1$ si $J \neq K$. A esta condición la llamaremos condición de normalización de tipo II con respecto a la componente K y la notación para esta solución normalizada será $\{A^{(\mathrm{II},K)}_{\vec{\nu},\vec{\mu},J}\}_{J=1,\dots,p}$.

2. Para cada $K = 1,\dots,q$ las relaciones de ortogonalidad para los multi-índices $(\vec{\nu}, \vec{\mu} - \vec{e}_K)$ tienen solución única con la siguiente condición de normalización: $\deg A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J} = \nu_J - 1$ y $\int_{\mathbb{R}} Q_{\vec{\nu},\vec{\mu}}(x)w_{2K}x^{\mu_K}dx = 1$. A esta condición la llamaremos condición de normalización de tipo I con respecto a la componente K y denotaremos esta solución normalizada como $\{A^{(\mathrm{I},K)}_{\tilde{\nu},\tilde{\mu},J}\}_{J=1,\dots,p}$.

Para establecer conexiones entre las condiciones de ortogonalidad (3.15) y un problema de ortogonalidad múltiple consideramos de nuevo la división euclídea $i = q_a n_a + r_a$, con $q_a \geq 0$ y $0 \leq r_a < n_a$, de modo que podemos descomponer el polinomio $p_{i,ab}$ de la siguiente manera

$$p_{i,ab}(z) = \sum_{j=1}^{n_b} z^{j-1}\Pi_{ij,ab}(z^{n_b}), \tag{3.18}$$

donde $\Pi_{ij,ab}(z^{n_b})$ son polinomios en z^{n_b} tales que

$$\deg \Pi_{ij,ab} \leq \begin{cases} q_b, \text{si } j \leq r_b \text{ o bien } j = r_b + 1 \text{ y } a = b, \\ q_b - 1, \text{si } j > r_b + 1 \text{ o bien } j = r_b + 1 \text{ y } a \neq b. \end{cases}$$

El carácter mónico de p_i determina la normalización de $\Pi_{i\, r_a+1,aa}$ que resulta ser un polinomio mónico con $\deg \Pi_{i\, r_a+1,aa} = q_a$.

Proposición 3.9. *1. La fórmula de inversión para* (3.18) *es la siguiente*

$$\Pi_{i\, j+1,ab}(z^{n_b}) = \frac{1}{n_b z^j}\sum_{k=0}^{n_b-1} \epsilon_b^{-jk} p_{i,ab}(\epsilon_b^k z). \tag{3.19}$$

2. El conjunto de relaciones de ortogonalidad (3.15) *se puede escribir como*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \sum_{b=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_b} \Pi_{ij,ab}(x^{n_b})x^{j-1}\rho_{k,bc}(x)(x^{n_b})^l dx = 0, \quad k = 0,\dots,m_c - 1, \quad l = 0,\dots,\theta_c - 1, \\ &\int_{\mathbb{R}} \sum_{b=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_b} \Pi_{ij,ab}(x^{n_b})x^{j-1}\rho_{k,bc}(x)(x^{n_b})^{\theta_c} dx = 0, \quad k = 0,\dots,\sigma_c - 1. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Demostración. Si definimos las siguientes raíces de la unidad $\epsilon_b := \exp(2\pi\mathrm{i}/n_b)$, y evaluamos (3.18) en $\epsilon_b^k z$, $k = 0, \dots, n_b - 1$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$p_{i,ab}(\epsilon_b^k z) = \sum_{j=1}^{n_b} (\epsilon_b^k z)^{j-1} \Pi_{ij,ab}(z^{n_b}) \quad k = 0, \dots, n_b - 1,$$

que resolvemos para obtener los polinomios $\Pi_{ik,ab}$ en términos de la transformada de Fourier discreta del polinomio p_i. □

Las ecuaciones (3.20) sugieren un cambio de variable de tipo $y = x^{n_b}$ en cada integrando. Para que este cambio de variable esté bien definido supondremos de aquí en adelante que todos los pesos están soportados exclusivamente en el semieje real positivo. Cuando realizamos este cambio de variable en (3.20) obtenemos las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \sum_{b=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_b} \Pi_{ij,ab}(y) \tilde{\rho}_{jk,bc}(y) y^l dy = 0, \quad k = 0, \dots, m_c - 1, \quad l = 0, \dots, \theta_c - 1, \\ &\int_{\mathbb{R}} \sum_{b=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_b} \Pi_{ij,ab}(y) \tilde{\rho}_{jk,bc}(y) y^{\theta_c} dy = 0, \quad k = 0, \dots, \sigma_c - 1, \end{aligned} \tag{3.21}$$

con el cambio de variable asociado a los pesos dado por

$$\tilde{\rho}_{jk,bc}(y) = \frac{1}{n_b} y^{\frac{j}{n_b} - 1} \rho_{k,bc}(y^{\frac{1}{n_b}}).$$

Ahora bien, si los pesos matriciales ρ_k son matrices de rango 1 tales que

$$\rho_{k,bc}(x) = v_{1,b}(x) w_{2,kc}(x^{n_b}),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \sum_{b=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_b} \Pi_{ij,ab}(y) w_{1,jb}(y) w_{2,kc}(y) y^l dy = 0, \quad k = 0, \dots, m_c - 1, \quad l = 0, \dots, \theta_c - 1, \\ &\int_{\mathbb{R}} \sum_{b=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_b} \Pi_{ij,ab}(y) w_{1,jb}(y) w_{2,kc}(y) y^{\theta_c} dy = 0, \quad k = 0, \dots, \sigma_c - 1, \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde

$$w_{1,jb}(y) = \frac{1}{n_b} y^{\frac{j}{n_b} - 1} v_{1,b}(y^{\frac{1}{n_b}}). \tag{3.23}$$

Con estos elementos ya podemos expresar el problema de ortogonalidad matricial generalizada como un determinado problema de ortogonalidad múltiple mixta con normalización de tipo II. En primer lugar, dados (a, j) con $a = 1, \dots, N$ y $j \in \mathbb{N}$ hacemos las definiciones $\mathcal{N}(a, j) := n_1 + \dots + n_{a-1} + j$ y $\mathcal{M}(a, j) := m_1 + \dots + m_{a-1} + j + 1$.

Proposición 3.10. *Las relaciones* (3.22) *son casos particulares de* (3.16) *con:*

1. $J = \mathcal{N}(b, j)$ *para* $b = 1, \dots, N$ *y* $j = 1, \dots, n_b$*; y* $K = \mathcal{M}(c, k)$ *para* $c = 1, \dots, N$ *y* $k = 0, \dots, m_c - 1$. *Equivalentemente* $J = n_1 + \dots + n_{b-1} + j$ *y* $K = m_1 + \dots + m_{c-1} + k + 1$.

2. $p = |\vec{n}| = n_1 + \dots + n_N$ *y* $q = |\vec{m}| = m_1 + \dots + m_N$.

3.

$$\nu_{\mathcal{N}(b,j)} = \begin{cases} q_b + 1, si\ j \leq r_b \ \ o\ bien\ j = r_b + 1 \ \ y\ a = b, \\ q_b, si\ j > r_b + 1 \ \ o\ bien\ j = r_b + 1 \ \ y\ a \neq b, \end{cases}$$

$$\mu_{\mathcal{M}(c,k)} = \begin{cases} \theta_c + 1, & 0 \leq k \leq \sigma_c - 1, \\ \theta_c, & \sigma_c \leq k \leq m_c - 1. \end{cases}$$

4. $|\vec{\nu}| = \sum_J \nu_J = Ni + 1$ *y* $|\vec{\mu}| = \sum_K \mu_K = Ni$.

5. $A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J} = \Pi_{ij,ab}$ *y* $p_{i,ab}(z) = \sum_{j=1}^{n_b} z^{j-1} A_{\vec{\nu},\vec{\mu},\mathcal{N}(b,j)}(z^{n_b})$.

6. $\deg A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J} = \nu_J$ *y* $J = \mathcal{N}(a, r_a + 1)$ *de modo que* $A_{\vec{\nu},\vec{\mu},J} = A^{(\mathrm{II},\mathcal{N}(a,r_a+1))}_{\vec{\nu},\vec{\mu},J}$*, y por lo tanto se verifica una condición de normalización de tipo* II *con respecto a* $\mathcal{N}(a, r_a + 1)$*. Entonces,* $p_{i,ab}(z) = \sum_{j=1}^{n_b} z^{j-1} A^{(\mathrm{II},\mathcal{N}(a,r_a+1))}_{\vec{\nu},\vec{\mu},\mathcal{N}(b,j)}(z^{n_b})$ *y quedan identificados como la solución a un problema de ortogonalidad múltiple.*

3.2.2. Problemas de Riemann-Hilbert

Tal y como hemos mostrado, los polinomios matriciales generalizados están asociados a una familia de polinomios múltiplemente ortogonales para el caso particular de un peso matricial de rango uno. En [38] se presentó un problema de Riemann-Hilbert para los polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto, (también se puede consultar [16]). Discutiremos como se aplica este resultado a los polinomios ortogonales generalizados $p_i(z)$.

Definición 3.11. 1. La transformada de Cauchy de una forma Q respecto a un peso w se define como

$$\hat{Q}_{\vec{\nu}',\vec{\mu}',K}(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{Q_{\vec{\nu}',\vec{\mu}'}(x)}{z-x} w_{2K}(x)dx. \tag{3.24}$$

2. Definamos la siguiente matriz compleja $Y(z)$ de dimensiones $(p+q)\times(p+q)$

$$\begin{aligned} Y_{K,J} &:= A^{(II,K)}_{\vec{\nu}'+\vec{e}_K,\vec{\mu}',J} & J = 1,\dots,p \quad K = 1,\dots,p \\ Y_{K,J+p} &:= \hat{Q}^{(II,K)}_{\vec{\nu}'+\vec{e}_K,\vec{\mu},J} & J = 1,\dots,q \quad K = 1,\dots,p \\ Y_{K+p,J} &:= -2\pi i A^{(I,K)}_{\vec{\nu}',\vec{\mu}'-\vec{e}_K,J} & J = 1,\dots,p \quad K = 1,\dots,q \\ Y_{K+p,J+p} &:= -2\pi i \hat{Q}^{(I,K)}_{\vec{\nu}',\vec{\mu}'-\vec{e}_K,j} & J = 1,\dots,q \quad K = 1,\dots,q \end{aligned} \tag{3.25}$$

3. Definamos también la siguiente matriz real $D(x)$ por bloques $(p+q)\times(p+q)$

$$D(x) := \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & W(x) \\ 0_{q\times p} & \mathbb{I}_q \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

donde $W_{JK}(x) = w_{1J}(x)w_{2K}(x)$.

Con estas definiciones vamos a adaptar a nuestro caso el resultado de [38], teniendo en cuenta el soporte de los pesos.

Teorema 3.12. *Sean $\vec{\nu}', \vec{\mu}'$ dos multi-índices tales que $|\vec{\nu}'| = |\vec{\mu}'|$ y supongamos que se verifican las condiciones de normalización. Sean también dos conjuntos de pesos $\{w_{1J}\}_{J=1,\dots,p}$ y $\{w_{2K}\}_{K=1,\dots,q}$ tales que para todo J, K $w_{1J}, (x)w_{2K}(x)$ son diferenciables casi doquiera en $\mathbb{R}_+$ y $x^j w_{1J}, x^j w_{2K} \in H^1(\mathbb{R}_+)$, $j = 0, \dots, \nu'_K - 1$. En $x = 0$ pedimos que los pesos estén acotados. Entonces la matriz $Y(z)$ es la única solución al siguiente problema de Riemann-Hilbert.*

1. *$Y(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.*
2. *$Y(x)_+ = Y(x)_- D(x)$ para todo $x > 0$.*
3. *$Y(z) \operatorname{diag}(z^{-\nu'_1}, \dots, z^{-\nu'_p}, z^{\mu'_1}, \dots, z^{\mu'_p}) = \mathbb{I}_{(p+q)} + O\left(z^{-1}\right)$ para $z \to \infty$.*
4. $Y(z) = O \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \log|z| & \log|z| & \cdots & \log|z| \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \log|z| & \log|z| & \cdots & \log|z| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \log|z| & \log|z| & \cdots & \log|z| \end{pmatrix}$ *para $z \to 0$.*

Demostración. En primer lugar comprobamos la unicidad de la solución. Como $\det D(x) = 1$ entonces $\det Y(z)$ es analítica a lo largo de la curva de integración, y por lo tanto la única posible singularidad de $\det Y(z)$ está en $z = 0$. Como $z \det Y(z) \to 0$ cuando $z \to 0$ la singularidad no puede ser un polo ni esencial, por lo tanto es evitable y $\det Y(z)$ es una función entera. El comportamiento asintótico y el teorema de Liouville determina $\det Y(z) = 1$. Consecuentemente existe $Y(z)^{-1}$. Dadas dos posibles soluciones para el problema $Y(z)$ y $\tilde{Y}(z)$, la matriz $Y(z)\tilde{Y}(z)^{-1}$ puede tener singularidades a lo sumo en $z = 0$. Como hemos comentado antes la singularidad en el origen debe ser evitable y $Y(z)\tilde{Y}(z)^{-1}$ es entera y acotada. Consecuentemente $Y(z)\tilde{Y}(z)^{-1} = \mathbb{I}_{p+q}$.

Ahora probaremos que la matriz $Y(z)$ es solución del problema de Riemann-Hilbert. La condición 1 es consecuencia del hecho de que los polinomios son funciones enteras y de que la teoría general de las integrales de tipo Cauchy [56] determina su analiticidad fuera de la curva de integración. Ahora observemos que la condición 2 es una condición de salto en el eje real positivo y es consecuencia de la fórmula de discontinuidad de Plemelj. Para la condición 3 vemos que $Y(z)_{ii}$ es un polinomio mónico de grado ν'_i para $i = 1, \dots, p$. Vemos también que el término de grado máximo de cada $Y(z)_{ii}$ es $z^{-\mu'_i}$ para $i = p, \dots, (p+q)$ debido a las relaciones de ortogonalidad y a las condiciones de normalización de tipo II. Consecuentemente los elementos diagonales de $Y(z) \operatorname{diag}(z^{-\nu'_1}, \dots, z^{-\nu'_p}, z^{\mu'_1}, \dots, z^{\mu'_p})$ son iguales a 1 y el resto se anulan asintóticamente como z^{-1}. Finalmente, la condición 4 es consecuencia del comportamiento de los polinomios y las transformadas de Cauchy. La condición acotada para los pesos en $z = 0$ hace que las transformadas de Cauchy tengan como mucho singularidades logarítmicas en $z = 0$. □

El teorema se puede aplicar a esta situación para dar

Proposición 3.13. *Si $\vec{\nu}' = \vec{\nu} - \vec{e}_{\mathcal{N}(a,r_a+1)}$ y $\vec{\mu}' = \vec{\mu}$, con $\vec{\nu}$ y $\vec{\mu}$ como en la proposición 3.10, tenemos $\Pi_{ij,ab} = Y_{\mathcal{N}(a,r_a+1),\mathcal{N}(b,j)}$ y*

$$\begin{aligned} p_{i,ab}(z) &= \sum_{j=1}^{n_b} z^{j-1} Y_{\mathcal{N}(a,r_a+1),\mathcal{N}(b,k)}(z^{n_b}), \\ Y_{\mathcal{N}(a,r_a+1),\mathcal{N}(b,j)}(z^{n_b}) &= \frac{1}{n_b z^{j-1}} \sum_{l=0}^{n_b-1} \epsilon_b^{-l(j-1)} p_{i,ab}(\epsilon_b^j z). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Destacamos que en [4] y [5] estos polinomios generalizados se consideran para el caso de una componente ($N = 1$) y además con $n = m$ y por lo tanto son un ejemplo particular de los polinomios escritos en este trabajo y están igualmente relacionados con polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto. Sin embargo, el problema de Riemann-Hilbert propuesto en [4] es diferente del problema de Daems-Kuijlaars para polinomios múltiplemente ortogonales y no es correcto. De hecho, la matriz Y considerada [4] no es analítica en el semiplano superior e inferior y por lo tanto no verifica las condiciones para el problema de Riemann-Hilbert especificado allí.

3.3. Fórmulas de Christoffel-Darboux para simetrías multigraduadas

En esta sección estudiaremos la generalización de la fórmula clásica de Christoffel-Darboux para las simetrías de tipo Hankel generalizadas. Una consecuencia de la simetría Hankel de la matriz de momentos asociada a un problema de ortogonalidad en la recta real es la existencia de la llamada fórmula de Christoffel-Darboux. Para un sistema de polinomios ortogonales en la recta real se verifica que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(x)P_k(y)}{h_k} = \frac{1}{h_{n-1}} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x-y}. \tag{3.28}$$

Nuestro objetivo en este apartado es obtener una generalización de la fórmula (3.28) para el caso de que los polinomios sean matriciales y que la matriz de momentos verifique una simetría de tipo Hankel más general.

Definición 3.14. Dado un sistema de polinomios bi-ortogonales matriciales $\{p_l, \tilde{p}_l\}$ definimos el l-ésimo núcleo de Christoffel-Darboux como la siguiente matriz $N \times N$

$$K^{[l]}(x,y) := \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{p}_k(x)^\dagger p_k(y). \tag{3.29}$$

Una de sus propiedades interesantes tiene que ver con su utilidad para representar proyecciones ortogonales. En primer lugar es evidente que cualquier vector semi-infinito (con componentes escalares o matriciales) v se puede escribir utilizando una notación por bloques de la siguiente manera

$$v = \left(\begin{array}{c} v^{[l]} \\ \hline v^{[\geq l]} \end{array}\right),$$

donde $v^{[l]}$ es el vector finito formado por los primeros l coeficientes de v y $v^{[\geq l]}$ el vector semi-infinito formado por los restantes coeficientes. Esta descomposición induce la siguiente estructura de bloques para el caso de una matriz semi-infinita cualquiera

$$g = \left(\begin{array}{c|c} g^{[l]} & g^{[l,\geq l]} \\ \hline g^{[\geq l,l]} & g^{[\geq l]} \end{array}\right).$$

Si esto lo aplicamos al caso de una matriz de momentos factorizable g la estructura triangular de los factores hace que la división por bloques respete la factorización, es decir

$$g^{[l]} = (S^{[l]})^{-1}\tilde{S}^{[l]}, \qquad (S^{-1})^{[l]} = (S^{[l]})^{-1}, \qquad (\tilde{S}^{-1})^{[\geq l]} = (\tilde{S}^{[\geq l]})^{-1}. \tag{3.30}$$

Con esta notación de bloques es natural definir el espacio de polinomios matriciales truncados con valores en $\mathbb{C}^{N\times N}$ como [1]

$$\mathcal{H}^{[l]} := \mathbb{C}\{\chi^{(0)}, \dots, \chi^{(l-1)}\}, \tag{3.31}$$

y su límite es el espacio de todos los polinomios

$$\mathcal{H} := \Big\{ \sum_{l\leq k\ll\infty} c_k \chi^{(k)}, c_k \in \mathbb{C}^{N\times N} \Big\}, \tag{3.32}$$

donde $l \ll \infty$ indica que en la serie solo hay un número finito de contribuciones no nulas.

Dicho espacio $\mathcal{H}$ tiene también las siguientes caracterizaciones equivalentes

$$\mathcal{H}^{[l]} = \mathbb{C}\{p_0, \dots, p_{l-1}\} = \mathbb{C}\{\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_{l-1}\}. \tag{3.33}$$

Asociada a estos espacios de polinomios truncados consideramos la noción de bi-ortogonalidad inducida por la forma sesquilineal introduciendo los conjuntos,

$$(\mathcal{H}^{[l]})^{\perp_2} := \Big\{ \sum_{l\leq k\ll\infty} c_k p_k, c_k \in \mathbb{C}^{N\times N} \Big\}, \qquad (\mathcal{H}^{[l]})^{\perp_1} := \Big\{ \sum_{l\leq k\ll\infty} c_k \tilde{p}_k, c_k \in \mathbb{C}^{N\times N} \Big\}.$$

que se puede formalizar del siguiente modo

$$\langle \mathcal{H}^{[l]}, (\mathcal{H}^{[l]})^{\perp_1} \rangle = 0, \qquad \langle (\mathcal{H}^{[l]})^{\perp_2}, \mathcal{H}^{[l]} \rangle = 0,$$

y da sentido a las siguientes descomposiciones

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{[l]} \oplus (\mathcal{H}^{[l]})^{\perp_1} = \mathcal{H}^{[l]} \oplus (\mathcal{H}^{[l]})^{\perp_2},$$

que inducen las siguientes proyecciones

$$\pi_1^{(l)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{[l]}, \qquad \pi_2^{(l)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{[l]}, \tag{3.34}$$

donde $\pi_1^{(l)}$ es la proyección sobre $\mathcal{H}^{[l]}$ paralelamente a $(\mathcal{H}^{[l]})^{\perp_1}$ y $\pi_2^{(l)}$ es la proyección sobre $\mathcal{H}^{[l]}$ paralelamente a $\oplus(\mathcal{H}^{[l]})^{\perp_2}$. Dichas proyecciones son una extensión de la noción de proyección ortogonal al caso bi-ortogonal.

Nos interesa ahora comentar algunas propiedades notables conocidas del núcleo de Christoffel-Darboux.

Proposición 3.15. *1. El núcleo de Christoffel-Darboux es el núcleo de los operadores de proyección definidos*

$$\begin{aligned} (\pi_1^{(l)} f)(x)^\dagger &= \int_{\mathbb{R}} K^{[l]}(x,y)\rho(x) f(y)^\dagger dy, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \\ (\pi_2^{(l)} f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho(x) K^{[l]}(y,x) dy, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

2. El núcleo $K^{[l]}(x,y)$ verifica la conocida propiedad reproductiva

$$K^{[l]}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} K^{[l]}(x,u) K^{[l]}(u,y) dy. \tag{3.36}$$

[1]Con esta notación, que se repetirá en varias ocasiones, nos referimos al subespacio vectorial complejo generado por los monomios de grado menor o igual que $l-1$.

3. *$K^{[l]}(x,y)$ es una forma sesquilineal cuya matriz asociada es la inversa de matriz de momentos (resultado que se conoce a veces como teorema de Aitken-Berg-Collar o teorema ABC [110])*

$$K^{[l]}(x,y) = (\chi^{[l]}(x))^{\dagger}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(y). \tag{3.37}$$

Ahora es necesario hacer una distinción entre la situación donde la simetría de la matriz de momentos es de tipo Hankel respecto al caso en el que la simetría es de tipo generalizado. La matriz de momentos del caso Hankel se puede construir a partir de un peso matricial ρ y de la sucesión de monomios χ como $g = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\rho(x)\chi(x)^{\dagger}dx$. En este caso las dos familias p_l y $\tilde{p}_l$ son familias de polinomios matriciales. Si la simetría es más general (de tipo Hankel multigraduada) lo más cómodo es escribir la matriz g como $g = \int_{\mathbb{R}} \chi_1(x)\chi_2(x)^{\dagger}dx$ donde $\chi_1(x) := (\mathbb{I}_N, x\mathbb{I}_N, x^2\mathbb{I}_N, \dots)^{\top}$ y $\chi_2(x) := (\rho_0(x), \rho_1(x), \rho_2(x), \dots)^{\top}$. En este caso la familia p_l (construida con χ_1) sigue siendo una familia de polinomios, pero la familia dual $\tilde{p}_l$ (construida con χ_2) se construye con combinaciones lineales de los pesos. En los casos estudiados en este capítulo se puede interpretar p_l como una familia de polinomios múltiplemente ortogonales de tipo II y la familia $\tilde{p}_l$ como el conjunto de formas lineales asociadas al problema dual (que es un problema múltiplemente ortogonal de tipo I). En toda esta sección el hecho de que p_l y $\tilde{p}_l$ sean familias de polinomios o funciones más generales no afecta al problema y los seguiremos llamando polinomios en este sentido generalizado. En el próximo capítulo trataremos el mismo tema con un enfoque múltiplemente ortogonal mucho más general.

El siguiente paso hacia la obtención de fórmulas de Christoffel-Darboux viene dado por el siguiente resultado

Proposición 3.16. *El núcleo $K^{[l]}$ de Christoffel-Darboux verifica la siguiente identidad si la matriz de momentos posee una simetría Hankel multigraduada tal que $\Lambda^{\vec{n}}g = g(\Lambda^{\vec{m}})^{\top}$.*

$$\begin{aligned} x^{\vec{n}}K^{[l]}(x,y) - K^{[l]}(x,y)y^{\vec{n}} = {}& \Big(\chi_2^{[\geq l]}(x)^{\dagger} - \chi_2^{[l]}(x)^{\dagger}(g^{[l]})^{-1}g^{[l,\geq l]}\Big)((\Lambda^{\vec{m}})^{[l,\geq l]})^{\top}(g^{[l]})^{-1}\chi_1^{[l]}(y) \\ & - \chi_2^{[l]}(x)^{\dagger}(g^{[l]})^{-1}(\Lambda^{\vec{n}})^{[l,\geq l]}\Big(\chi_1^{[\geq l]}(y) - g^{[\geq l,l]}(g^{[l]})^{-1}\chi_1^{[l]}(y)\Big). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Demostración. La simetría de tipo Hankel multigraduada se puede escribir usando la notación en forma de bloques como

$$(\Lambda^{\vec{n}})^{[l]}g^{[l]} + (\Lambda^{\vec{n}})^{[l,\geq l]}g^{[\geq l,l]} = g^{[l]}((\Lambda^{\vec{m}})^{[l]})^{\top} + g^{[l,\geq l]}((\Lambda^{\vec{m}})^{[l,\geq l]})^{\top},$$

o equivalentemente

$$(g^{[l]})^{-1}(\Lambda^{\vec{n}})^{[l]} - ((\Lambda^{\vec{m}})^{[l]})^{\top}(g^{[l]})^{-1} = (g^{[l]})^{-1}(g^{[l,\geq l]}((\Lambda^{\vec{m}})^{[l,\geq l]})^{\top} - (\Lambda^{\vec{n}})^{[l,\geq l]}g^{[\geq l,l]})(g^{[l]})^{-1}.$$

La propiedad de autovalor que tiene el operador de traslación Λ se puede traducir al caso multigraduado de la siguiente forma. Para la sucesión de monomios χ_1 tenemos como es habitual que $\Lambda\chi_1(x) = x\chi_1(x)$, mientras que para la sucesión χ_2 la expresión por componentes da lugar a $(\Lambda^{m_b}\chi_2(x))_{j,ab} = x^{n_a}(\chi_2(x))_{j,ab}$. Esto se traduce en las siguientes expresiones por bloques

$$\begin{aligned} (\Lambda^{\vec{n}})^{[l]}\chi_1^{[l]}(x) &= x^{\vec{n}}\chi_1^{[l]}(x) - (\Lambda^{\vec{n}})^{[l,\geq l]}\chi_1^{[\geq l]}(x), \\ \chi_2^{[l]}(x)^{\dagger}((\Lambda^{\vec{m}})^{[l]})^{\top} &= x^{\vec{n}}\chi_2^{[l]}(x)^{\dagger} - \chi_2^{[\geq l]}(x)^{\dagger}((\Lambda^{\vec{m}})^{[l,\geq l]})^{\top}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado buscado si empleamos conjuntamente el teorema ABC, la propiedad de autovalor y la simetría Hankel. □

Si queremos simplificar la expresión anterior es necesario introducir algunos elementos nuevos. En primer lugar, el sistema lineal al que dan lugar las relaciones de ortogonalidad permite reescribir los polinomios utilizando una notación matricial.

Proposición 3.17. *La familia de polinomios matriciales p_l admite la siguiente representación matricial*

$$\begin{aligned} p_l(x) &= \chi_1^{(l)}(x) - \begin{pmatrix} g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} \end{pmatrix} (g^{[l]})^{-1}\chi_1^{[l]}(x) \\ &= \tilde{S}_{ll} \begin{pmatrix} 0_N & 0_N & \cdots & \mathbb{I}_N \end{pmatrix} (g^{[l+1]})^{-1}\chi_1^{[l+1]}(x), \end{aligned} \tag{3.39}$$

mientras que para los polinomios duales (generalizados) $\tilde{p}_l$ se puede emplear la siguiente representación

$$\begin{aligned} \tilde{p}_l(x)^\dagger &= \left(\chi^{(l)}(x)^\dagger - \chi_2^{[l]}(x)(g^{[l]})^{-1} \begin{pmatrix} g_{0,l} & g_{1,l} & \cdots & g_{l-1,l} \end{pmatrix}^\top \right)\tilde{S}_{ll}^{-1} \\ &= \chi_2^{[l+1]}(x)^\dagger (g^{[l+1]})^{-1} \begin{pmatrix} 0_N & 0_N & \cdots & \mathbb{I}_N \end{pmatrix}^\top. \end{aligned} \tag{3.40}$$

En segundo lugar hay que definir nuevas familias de polinomios (generalizados), que llamaremos polinomios asociados

Definición 3.18. Definimos las familias de polinomios asociados

$$\begin{aligned} p_{l,+j}(x) &:= \chi_1^{(l+j)}(x) - \begin{pmatrix} g_{l+j,0} & g_{l+j,1} & \cdots & g_{l+j,l-1} \end{pmatrix} (g^{[l]})^{-1}\chi_1^{[l]}(x), \\ p_{l,-j}(x) &:= e_{l-j}^\top (g^{[l+1]})^{-1}\chi_1^{[l+1]}(x), \end{aligned} \tag{3.41}$$

y las familias de polinomios asociados duales

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{l,+j}(x)^\dagger &:= \chi_2^{(l+j)}(x)^\dagger - \chi_2^{[l]}(x)^\dagger (g^{[l]})^{-1} \begin{pmatrix} g_{0,l+j} & g_{1,l+j} & \cdots & g_{l-1,l+j} \end{pmatrix}^\top, \\ \tilde{p}_{l,-j}(x)^\dagger &:= \chi_2^{[l+1]}(x)^\dagger (g^{[l+1]})^{-1} e_{l-j}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

donde[2] $e_j = (\underbrace{0_N \quad 0_N \quad \cdots \quad 0_N}_{j} \quad \mathbb{I}_N \quad 0_N \quad \cdots \quad)^\top$.

De las fórmulas anteriores se puede ver que

$$\begin{aligned} p_l &= p_{l,+0} = \tilde{S}_{ll} p_{l,-0}, \\ \tilde{p}_l^\dagger &= \tilde{p}_{l,+0}^\dagger \tilde{S}_{ll}^{-1} = \tilde{p}_{l,-0}^\dagger. \end{aligned} \tag{3.43}$$

También es interesante destacar que satisfacen relaciones de ortogonalidad modificadas y que se pueden expresar de forma sencilla utilizando los polinomios "ordinarios". Resumimos estos resultados en la siguiente proposición.

[2]Cometemos un ligero abuso de notación al no indicar la dimensión del espacio, que será siempre la necesaria para que los productos matriciales tengan sentido.

Proposición 3.19. *1. Los polinomios $p_{l,+j}$ y $\tilde{p}_{l,+j}$ son polinomios matriciales mónicos de grado $l+j$ que satisfacen*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} p_{l,+j}(x)\rho_k(x)dx &= 0_N, k=0,\dots,l-1,\\ \int_{\mathbb{R}} x^k\tilde{p}_{l,+j}(x)^{\dagger}dx &= 0_N, k=0,\dots,l-1,\end{aligned} \tag{3.44}$$

mientras que $p_{l,-j}$ y $\tilde{p}_{l,-j}$ son polinomios matriciales de grado l que satisfacen las relaciones de ortogonalidad generalizada

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} p_{l,-j}\rho_k(x)dx &= \delta_{k,l-j}\mathbb{I}_N,\\ \int_{\mathbb{R}} x^k\tilde{p}_{l,-j}^{\dagger}dx &= \delta_{k,l-j}\mathbb{I}_N.\end{aligned} \tag{3.45}$$

2. Las expresiones que relacionan los polinomios asociados con los polinomios ordinarios son las siguientes

$$\begin{aligned}p_{l,+j} &= p_{l+j} + S^{-1}_{l+j,l+j-1}p_{l+j-1} + \dots + S^{-1}_{l+j,l}p_l,\\ p_{l,-j} &= \tilde{S}^{-1}_{l-j,l}p_l + \tilde{S}^{-1}_{l-j,l-1}p_{l-1} + \dots + \tilde{S}^{-1}_{l-j,l-j}p_{l-j},\end{aligned} \tag{3.46}$$

mientras que los polinomios asociados duales verifican fórmulas análogas

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{l,+j} &= \tilde{S}^{\dagger}_{l+j,l+j}\tilde{p}_{l+j} + \tilde{S}^{\dagger}_{l+j-1,l+j}\tilde{p}_{l+j-1} + \dots + \tilde{S}^{\dagger}_{l,l+j}\tilde{p}_l,\\ \tilde{p}_{l,-j} &= S^{\dagger}_{l,l-j}\tilde{p}_l + S^{\dagger}_{l-1,l-j}\tilde{p}_{l-1} + \dots + p_{l-j}.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Demostración. 1. Son consecuencia directa de la definición, basta con multiplicar por la derecha por $(\chi_2^{[l]})^{\dagger}$ (para los no duales) o por la izquierda por $\chi_1^{[l]}$ (para los duales).

2. Para los polinomios $p_{l,+j}$ las relaciones de ortogonalidad que verifican hacen que $p_{l,+j} \in \operatorname{span}\{p_l, p_{l+1}, \dots, p_{l+j}\}$ y podemos escribir por lo tanto $p_{l,+j} = a_j p_{l+j} + a_{j-1}p_{l+j-1} + \dots + a_0 p_l$. Los coeficientes satisfacen el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_j & a_{j-1} & \cdots & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & S_{l+j,l+j-1} & \cdots & S_{l+j,l}\\ 0 & 1 & \cdots & S_{l+j-1,l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

de donde obtenemos con facilidad que $p_{l,+j} = p_{l+j} + S^{-1}_{l+j,l+j-1}p_{l+j-1} + \dots + S^{-1}_{l+j,l}p_l$.

Para la familia de polinomios asociados $p_{l,-j}$, dado que $p_{l,-j}$ es un polinomio de grado l tenemos que $p_{l,-j} \in \operatorname{span}\{p_l, p_{l-1}, \dots, p_0\}$. Empleando de nuevo las relaciones de ortogonalidad que satisfacen obtenemos las fórmulas para los coeficientes

$$\int p_{l,-j}(x)\tilde{p}_k(x)^{\dagger}dx = \tilde{S}^{-1}_{lk}, k=0,\dots,l$$

es decir $p_{l,-j} = \tilde{S}^{-1}_{l-j,l}p_l + \tilde{S}^{-1}_{l-j,l-1}p_{l-1} + \dots + \tilde{S}^{-1}_{l-j,l-j}p_{l-j}$.

Para el grupo de polinomios (generalizados) asociados duales el mismo razonamiento lleva a los resultados obtenidos. □

Estamos ya en condiciones de obtener la fórmula buscada que enunciamos en el siguiente teorema

Teorema 3.20. *Para $l \geq \text{máx}\{|\vec{n}|, |\vec{m}|\}$ tenemos la siguiente fórmula de Christoffel-Darboux*

$$(x^{\vec{n}} K^{[l]} - K^{[l]} y^{\vec{n}})(x,y) = \sum_{a=1}^{N} \Big(\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{l,+j}(x)^{\dagger} E_{aa} p_{l-1,-(m_a-j-1)}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{p}_{l-1,-(n_a-j-1)}(x)^{\dagger} E_{aa} p_{l,+j}(y) \Big). \tag{3.48}$$

Demostración. Mediante el cálculo directo se puede obtener que $(\Lambda^n)^{[l,\geq l]} = \sum_{j=0}^{n-1} e_{l-n+j} e_j^{\top}$ para $l \geq n$, de modo que haciendo sustituciones en la proposición 3.16 tenemos que para $l \geq \text{máx}\{|\vec{n}|, |\vec{m}|\}$

$$\begin{aligned}(x^{\vec{n}} K^{[l]}(x,y) - K^{[l]}(x,y) y^{\vec{n}}) = &\sum_{a=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_a-1} \Big(\chi^{[\geq l]}(x)^{\dagger} - \chi^{[l]}(x)^{\dagger} (g^{[l]})^{-1} g^{[l,\geq l]}\Big) e_j E_{aa} e_{l-m_a+j}^{\top} (g^{[l]})^{-1} \chi^{[l]}(y) \\ &- \sum_{j=0}^{n_a-1} \chi^{[l]}(x)^{\dagger} (g^{[l]})^{-1} e_{l-n+j} E_{aa} e_j^{\top} \Big(\chi^{[\geq l]}(y) - g^{[\geq l,l]} (g^{[l]})^{-1} \chi^{[l]}(y)\Big).\end{aligned}$$

Si empleamos las definiciones de los polinomios asociados (la definición 3.18) obtenemos la fórmula buscada. □

Corolario 3.21. *Las componentes de la matriz $K^{[l]}$ que llamaremos $K^{[l]}_{a,b}$ verifican la siguiente ecuación escalar para $l \geq \text{máx}\{|\vec{n}|, |\vec{m}|\}$ y $a, b = 1, \dots, N$.*

$$K^{[l]}(x,y)_{ab} = \sum_{c=1}^{N} \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{l,+j}(x)^{\dagger}_{ac} p_{l-1,-(m_c-j-1)}(y)_{cb} - \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{p}_{l-1,-(n_c-j-1)}(x)^{\dagger}_{ac} p_{l,+j}(y)_{cb}}{x^{n_a} - y^{n_b}}. \tag{3.49}$$

3.4. Flujos de tipo Toda en la teoría de polinomios ortogonales

Hasta ahora lo que hemos hecho es considerar un problema de factorización “estático” para una matriz de momentos dada. A partir de ella se pueden construir elementos de la teoría clásica de polinomios ortogonales, tal es el caso de las relaciones de recurrencia, las fórmulas de Christoffel-Darboux, o los problemas de Riemann-Hilbert. La introducción de los elementos propios de la teoría de sistemas integrables se puede hacer introduciendo determinadas deformaciones temporales y estudiando las propiedades de la factorización dependiente del tiempo de la matriz de momentos deformada. Hay dos principales diferencias entre la versión de la jerarquía de Toda descrita en el capítulo 2 y la que discutimos aquí y en los siguientes capítulos. La primera está asociada al hecho de que la descripción anterior era una descripción abstracta, sin embargo la actual es una descripción cuyas soluciones están reducidas con el objeto de buscar conexiones con teorías de polinomios ortogonales. La segunda diferencia tiene su origen en que la condición inicial del problema de factorización g es distinta en ambos casos. Allí es una matriz doblemente infinita genérica mientras que aquí es una matriz semi-infinita con unas simetrías determinadas, precisamente para poder caracterizarla como una matriz de momentos y buscar esta conexión con objetos de las teorías de polinomios ortogonales.

3.4.1. Introducción de parámetros de evolución temporal

Suponemos que $t = (\{t_{ja}\}, \{\tilde{t}_{ja}\})$, $j = 1, 2, \dots$, $a = 1, \dots, N$, es una colección de parámetros complejos

Definición 3.22. 1. Definimos los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} W_0 &:= \sum_{a=1}^{N} E_{aa} \exp(\sum_{j=1}^{\infty} t_{ja} \Lambda^j), \\ \tilde{W}_0 &:= \sum_{a=1}^{N} E_{aa} \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{t}_{ja} (\Lambda^\top)^j), \end{aligned} \tag{3.50}$$

2. Consideramos la factorización de Gauss dependiente del tiempo para la matriz $g(t)$

$$g(t) := W_0(t) g \tilde{W}_0(t)^{-1} = S(t)^{-1} \tilde{S}(t). \tag{3.51}$$

3. Definimos las familias de polinomios matriciales dependientes del tiempo

$$p(z,t) := S(t)\chi(z), \qquad \tilde{p}(z,t) := (S(t)^{-1})^\dagger \chi(z). \tag{3.52}$$

Por construcción, los nuevos polinomios polinomios dependientes del tiempo también constituyen un sistema bi-ortogonal, es decir

Proposición 3.23. *Dados dos polinomios $p_i(z,t), \tilde{p}_j(z,t)$, se verifica que*

$$\langle p_i, \tilde{p}_j \rangle = \delta_{i,j} \mathbb{I}_N. \tag{3.53}$$

La construcción de familias de polinomios ortogonales está asociada a matrices g con simetrías Hankel, por eso es importante ver que

$$\begin{aligned} \Lambda g(t) &= \Lambda W_0 g \tilde{W}_0^{-1} = W_0 \Lambda g \tilde{W}_0^{-1} \\ &= W_0 g \Lambda^\top \tilde{W}_0^{-1} = W_0 g \tilde{W}_0^{-1} \Lambda^\top = g(t) \Lambda^\top, \end{aligned}$$

de donde deducimos que $g(t)$ es Hankel por bloques si lo es g.

En general las deformaciones continuas arbitrarias no preservan el carácter hermítico de g. Si queremos estudiar los casos donde la bi-ortogonalidad se reduce a ortogonalidad "simple" en la recta real entonces hay que restringir el tipo de deformaciones posibles.

Proposición 3.24. *Si la matriz g es Hankel por bloques y las matrices $g_{ij} = \mu^{(i+j)}$ son hermíticas entonces*

1. *Las familias $p(z)$ y $\tilde{p}(z)$ son proporcionales y ambas son familias de polinomios ortogonales matriciales en la recta real.*

2. *Además, si los tiempos asociados a las deformaciones continuas satisfacen alguna de las dos condiciones siguientes*

   a) $t_{ja}, \tilde{t}_{ja} \in \mathbb{R}$ *y además* $t_{ja} = t_j, \tilde{t}_{ja} = \tilde{t}_j$, $a = 1, \dots, N$.

   b) $t_{ja}, \tilde{t}_{ja}$ *son tales que* $t_{ja} + \overline{\tilde{t}_{ja}} = 0$.

el resultado es cierto para la matriz $g(t)$ dependiente del tiempo.

Demostración. 1. Si la matriz g es Hankel por bloques y sus bloques son hermíticos la matriz g (sin considerar su estructura de bloques) es hermítica. Efectivamente, dada una pareja de índices i,j para designar un bloque de g, existen cuatro índices k,l,m,n con $k,l\geq 0$ y $m,n=1,\dots,N$ que satisfacen $g_{ij}=(A_{kl})_{mn}=\overline{(A_{kl})_{nm}}=\overline{(A_{lk})_{nm}}=\bar{g}_{ji}$. Como consecuencia de ello $g=g^{\dagger}$ y por la proposición 3.2 la primera parte del resultado es cierta.

2. Calculemos ahora la evolución temporal para g. Tenemos que

$$W_0=\sum_{a=1}^{N}E_{aa}\exp(\sum_{j=1}^{\infty}t_{ja}\Lambda^j)=\sum_{a=1}^{N}E_{aa}\sum_{j=0}^{\infty}s_j^{(a)}\Lambda^j,$$

donde $s_j^{(a)}$ es el j-ésimo polinomio de Schur[3] para la componente a. Consecuentemente y tomando $s_j:=\sum_{a=1}^{N}E_{aa}s_j^{(a)}$ calculamos

$$W_0=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{N}E_{aa}s_j^{(a)}\Lambda^j=\sum_{j=0}^{\infty}s_j\Lambda^j,$$

de modo que es fácil ver la estructura por bloques de W_0, cuyos bloques están dados por $(W_0)_{ij}=s_{j-i}$ si $j-i\geq 0$ y 0_N en el otro caso. Un argumento similar para $\tilde{W}_0^{-1}$ lleva a $(\tilde{W}_0^{-1})_{ij}=\tilde{s}_{i-j}$ si $i-j\geq 0$ y 0_N en caso contrario (aquí $\tilde{s}_j:=\sum_{a=1}^{N}E_{aa}\tilde{s}_j^{(a)}$ y $\tilde{s}_j^{(a)}$ es el j-ésimo polinomio de Schur para la componente a pero ahora en las variables $-\tilde{t}_{ja}$).

Con esto ya podemos calcular la evolución temporal para un bloque de g

$$g(t)_{ij}=\sum_{k,l\geq 0}(W_0)_{ik}g_{kl}(\tilde{W}_0^{-1})_{lj}=\sum_{k\geq i,l\geq j}s_{k-i}\mu^{(k+l)}\tilde{s}_{l-j}=\sum_{k,l\geq 0}s_k\mu^{(i+j+k+l)}\tilde{s}_l.$$

Entonces,

a) Si la primera condición es cierta todas las matrices s_j y $\tilde{s}_j$ son reales y escalares de modo que

$$\begin{aligned}g(t)_{ij}^{\dagger}&=\sum_{k,l\geq 0}\tilde{s}_l^{\dagger}\mu^{(i+j+k+l)}s_k^{\dagger}=\sum_{k,l\geq 0}s_k^{\dagger}\mu^{(i+j+k+l)}\tilde{s}_l^{\dagger}=\sum_{k,l\geq 0}s_k\mu^{(i+j+k+l)}\tilde{s}_l\\&=g(t)_{ij}.\end{aligned}$$

b) Si se verifica la segunda condición entonces $s_j=\tilde{s}_j^{\dagger}$ para todo j de modo que

$$\begin{aligned}g(t)_{ij}^{\dagger}&=\sum_{k,l\geq 0}\tilde{s}_l^{\dagger}\mu^{(i+j+k+l)}s_k^{\dagger}=\sum_{l,k\geq 0}\tilde{s}_k^{\dagger}\mu^{(i+j+l+k)}s_l^{\dagger}=\sum_{k,l\geq 0}s_k\mu^{(i+j+k+l)}\tilde{s}_l\\&=g(t)_{ij}.\end{aligned}$$

Bajo cualquiera de las dos condiciones $g(t)$ es Hankel por bloques con bloques hermíticos, por lo tanto es una matriz hermítica. Eso prueba la segunda parte de la proposición. □

[3] Los polinomios de Schur están dados por $\exp(\sum_{j=1}^{\infty}t_{ja}\Lambda^j)=\sum_{j=0}^{\infty}s_j^{(a)}\Lambda^j$ de modo que $s_0^{(a)}=1$ y $s_j^{(a)}=\sum_{p=1}^{j}\sum_{j_1+\cdots+j_p=j}t_{j_1a}\cdots t_{j_pa}=t_{ja}+\cdots$ donde el término que queda es un polinomio de grado como máximo j en las variables $t_{1a},t_{2a},\dots,t_{j-1,a}$.

De (3.11) concluimos que $g(t)$ es también de tipo Hankel multigraduada $(\vec{n},\vec{m})$ si g lo es. Lo que permite estudiar los efectos de la adición de una evolución temporal a la estructura multigraduada de g.

Tal y como acabamos de calcular, la evolución temporal de g se puede expresar en términos de polinomios de Schur a través de

$$g_{ij}(t) = \sum_{k,l\geq 0} s_k g_{i+k,j+l}\tilde{s}_l, \tag{3.54}$$

lo que, junto con (3.12) lleva a la siguiente evolución para los pesos del caso multigraduado

$$\rho_j(t) = \sum_{k,l\geq 0} x^k s_k \rho_{j+l}\tilde{s}_l = \exp(t(x))\sum_{l\geq 0}\rho_{j+l}\tilde{s}_l, \tag{3.55}$$

donde $t(x) = \sum_{a=1}^{N} t_a(x)E_{aa}$ y $t_a(x) := \sum_{j\geq 1} t_{ja}x^j$.

Se puede verificar fácilmente que si ρ_j satisface la condición periódica (3.13), entonces $\rho_j(t)$ también la satisface. De (3.55) obtenemos de forma explícita

$$\begin{pmatrix}\rho_{0,ab}(t)\\ \vdots \\ \rho_{m_b-1,ab}(t)\end{pmatrix} = \exp(t_a(x))\begin{pmatrix}\mathscr{S}_{0,ab} & \mathscr{S}_{1,ab} & \mathscr{S}_{2,ab} & \cdots & \mathscr{S}_{m_b-1,ab}\\ x^{n_a}\mathscr{S}_{m_b-1,ab} & \mathscr{S}_{0,ab} & \mathscr{S}_{1,ab} & \cdots & \mathscr{S}_{m_b-2,ab}\\ x^{n_a}\mathscr{S}_{m_b-2,ab} & x^{n_a}\mathscr{S}_{m_b-1,ab} & \mathscr{S}_{0,ab} & \cdots & \mathscr{S}_{m_b-2,ab}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x^{n_a}\mathscr{S}_{1,ab} & x^{n_a}\mathscr{S}_{2,ab} & x^{n_a}\mathscr{S}_{3,ab} & \cdots & \mathscr{S}_{0,ab}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{0,ab}\\ \vdots \\ \rho_{m_b-1,ab}\end{pmatrix} \tag{3.56}$$

donde

$$\mathscr{S}_{i,ab} = \sum_{j\geq 0}\tilde{s}^{(b)}_{i+m_b j}(x^{n_a})^j = \frac{1}{m_b x^{in_a/m_b}}\sum_{k=0}^{m_b-1}\varepsilon_b^{ik}\exp(-\tilde{t}_b(\varepsilon_b^k x^{n_a/m_b})), \qquad \varepsilon_b^{m_b} = 1.$$

Si definimos

$$\tilde{t}^{(l)}_a(x) = \sum_{j\geq 0}\tilde{t}_{jm_b+l,a}x^{jm_b+l}, \qquad l = 0,1,\dots,m_b-1,$$

tenemos

$$\tilde{t}_a(\varepsilon_b^k x) = \tilde{t}^{(0)}_a(x) + \tilde{t}^{[k]}_a(x), \qquad \tilde{t}^{[k]}_a(x) = \sum_{\substack{j\geq 0\\ l=1,\dots,m_b-1}}\tilde{t}_{jm_b+l}\varepsilon_b^{kl}x^{jm_b+l},$$

y por lo tanto

$$\mathscr{S}_{i,ab} = \frac{1}{m_b x^{in_a/m_b}}\exp(-\tilde{t}^{(0)}_b(x^{n_a/m_b}))\sum_{k=0}^{m_b-1}\varepsilon_b^{ik}\exp(-\tilde{t}^{[k]}_b(x^{n_a/m_b})). \tag{3.57}$$

Finalmente deducimos que

$$\rho_{j,ab}(t) = \exp(t_a(x) - \tilde{t}^{(0)}_b(x^{n_a/m_b}))\sum_{k=0}^{m_b-1}\hat{\rho}^{(k)}_{j,ab}\exp\left(-\tilde{t}^{[k]}_b(x^{n_a/m_b})\right), \tag{3.58}$$

donde hemos usado la transformada de Fourier discreta de los pesos

$$\hat{\rho}^{(k)}_{j,ab} := \frac{1}{m_b}\sum_{i=1}^{m_b-1} \varepsilon_b^{ik} x^{-in_a/m_b}\rho_{j+i,ab}.$$

La evolución de los pesos dada por (3.55) conduce a la siguiente evolución de $w_{1,jb}$ y $w_{2,kc}$

$$w_{1,jb}(t) = \exp(\sum_{k\geq 1} y^{k/n_b} t_{kb})w_{1,jb}, \qquad w_{2,kc}(t) = \sum_{l\geq 0} w_{2,k+l\ c}\tilde{s}^{(c)}_l.$$

Usando (3.58) podemos escribir

$$w_{1,jb}(t) = \exp(\sum_{k\geq 1} y^{k/n_b} t_{kb})w_{1,jb},$$
$$w_{2,kc}(t) = \exp(-\tilde{t}^{(0)}_b(y^{1/m_c}))\sum_{l=0}^{m_b-1}\tilde{w}^{(l)}_{2k,c}\exp(-\tilde{t}^{[l]}_b(y^{1/m_c})), \quad \tilde{w}^{(l)}_{2,kc} := \frac{1}{m_c}\sum_{i=1}^{m_b-1}\varepsilon_c^{il}y^{-i/m_c}w_{2\ k+i,c}.$$

Estos pesos evolucionados satisfacen la condición de positividad (recordemos que su soporte está incluido en la semirecta real positiva) cuando $t_{jb}, \tilde{t}_{jm_c c} \in \mathbb{R}$ y $\tilde{t}_{jc} \leq 0$ para $j \neq 0 \bmod(m_c)$.

3.4.2. Ecuaciones de Toda

Tal y como hemos hecho en el capítulo 2 definimos los objetos habituales en las jerarquías integrables de tipo Toda

Definición 3.25. Asociada a la factorización LU deformada consideramos los objetos integrables habituales

1. Las matrices de onda semi-infinitas

$$W(t) := S(t)W_0(t), \qquad \tilde{W}(t) := \tilde{S}(t)\tilde{W}_0(t). \tag{3.59}$$

2. Las matrices por bloques semi-infinitas de Lax y los operadores $C_{aa}, a = 1 \dots N$

$$L(t) := S(t)\Lambda S(t)^{-1}, \qquad \tilde{L}(t) := \tilde{S}(t)\Lambda^\top \tilde{S}(t)^{-1}, \tag{3.60}$$
$$C_{aa}(t) := S(t)E_{aa}S(t)^{-1}, \qquad \tilde{C}_{aa}(t) := \tilde{S}(t)E_{aa}\tilde{S}(t)^{-1} \tag{3.61}$$

3. Las matrices semi-infinitas de Zakharov-Shabat

$$B_{ja} := (C_{aa}L^j)_+, \qquad \tilde{B}_{ja} := (\tilde{C}_{aa}\tilde{L}^j)_-. \tag{3.62}$$

Tenemos entonces la versión para el caso semi-infinito del teorema 2.6 (con idéntica demostración)

Teorema 3.26. *Para $j, j' = 1, 2, \dots,$ y $a = 1, \dots, N$ se verifican las siguientes relaciones diferenciales*

1. *El sistema lineal para las matrices de ondas*

$$\frac{\partial W}{\partial t_{ja}} = B_{ja}W, \qquad \frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{ja}} = \tilde{B}_{ja}W, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{ja}} = B_{ja}\tilde{W}, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{ja}} = \tilde{B}_{ja}\tilde{W}. \tag{3.63}$$

2. Las ecuaciones de Lax

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial t_{ja}}=[B_{ja},L], &&\frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_{ja}}=[\tilde{B}_{ja},L], &&\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_{ja}}=[B_{ja},\tilde{L}], &&\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}_{ja}}=[\tilde{B}_{ja},\tilde{L}],\\
&\frac{\partial C_{aa}}{\partial t_{jb}}=[B_{jb},C_{aa}], &&\frac{\partial C_{aa}}{\partial \tilde{t}_{jb}}=[\tilde{B}_{jb},C_{aa}], &&\frac{\partial \tilde{C}_{aa}}{\partial t_{jb}}=[B_{jb},\tilde{C}_{aa}], &&\frac{\partial \tilde{C}_{aa}}{\partial \tilde{t}_{jb}}=[\tilde{B}_{jb},\tilde{C}_{aa}].
\end{aligned} \tag{3.64}$$

3. Las ecuaciones de Zakharov-Shabat

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial B_{ja}}{\partial t_{j'b}}-\frac{\partial B_{j'b}}{\partial t_{ja}}+[B_{ja},B_{j'b}]=0,\\
&\frac{\partial \tilde{B}_{ja}}{\partial \tilde{t}_{j'b}}-\frac{\partial \tilde{B}_{j'b}}{\partial \tilde{t}_{ja}}+[\tilde{B}_{ja},\tilde{B}_{j'b}]=0,\\
&\frac{\partial B_{ja}}{\partial \tilde{t}_{j'b}}-\frac{\partial \tilde{B}_{j'b}}{\partial t_{ja}}+[B_{ja},\tilde{B}_{j'b}]=0.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

3.4.3. Relaciones de recurrencia y simetrías para el caso multigraduado

En términos de los operadores de Lax la reducción Hankel multigraduada se puede escribir como se hace en (2.43)

$$\mathscr{L}:=\sum_{a=1}^{N}L^{n_a}C_{aa}=\sum_{b=1}^{N}\tilde{L}^{m_b}\tilde{C}_{bb}. \tag{3.66}$$

En esta sección supondremos que

$$n_1\geq\cdots\geq n_N\geq 1, \qquad\qquad m_1\geq\cdots\geq m_N\geq 1,$$

y también que $n_1=\cdots=n_r$ y $n_r>n_{r+1}$.

Dada la definición de los operadores de Lax en (3.60), de la ecuación (3.66) deducimos que

$$\mathscr{L}=(E_{11}+\cdots+E_{rr})\Lambda^{n_1}+\mathscr{L}_{n_1-1}\Lambda^{n_1-1}+\cdots+\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{-1}\Lambda^\top+\mathscr{L}_{-2}(\Lambda^\top)^2+\cdots,$$

y también tenemos $\mathscr{L}=\sum_{b=1}^N\tilde{L}^{m_b}\tilde{C}_b$, así que por lo tanto

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{-m_1}(\Lambda^\top)^{m_1}+\mathscr{L}_{-m_1+1}(\Lambda^\top)^{m_1-1}+\cdots+\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1\Lambda+\mathscr{L}_2\Lambda^2+\cdots.$$

Basándonos en las dos expresiones obtenemos la estructura de bandas por bloques de $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}=(E_{11}+\cdots+E_{rr})\Lambda^{n_1}+\mathscr{L}_{n_1-1}\Lambda^{n_1-1}+\cdots+\mathscr{L}_{-m_1+1}(\Lambda^\top)^{m_1-1}+\mathscr{L}_{-m_1}(\Lambda^\top)^{m_1}. \tag{3.67}$$

Proposición 3.27. *Los polinomios $p_i(z)$ satisfacen*

$$(E_{11}+\cdots+E_{rr})p_{i+n_1}(z)+\cdots+\mathscr{L}_{-m_1}p_{i-m_1}(z)=p_i(z)(\sum_{a=1}^{n}z^{n_a}E_{aa}) \tag{3.68}$$

Demostración. Solo tenemos que probar que $\mathscr{L}p(z)=p(z)(\sum_{a=1}^n z^{n_a}E_{aa})$, pero esto es consecuencia de

$$\mathscr{L}p(z)=S(\sum_{a=1}^{N}\Lambda^{n_a}E_{aa})S^{-1}S\chi(z)=S\chi(z)(\sum_{a=1}^{N}z^{n_a}E_{aa})=p(z)(\sum_{a=1}^{n}z^{n_a}E_{aa}). \qquad \square$$

De forma similar, partiendo de que $\mathscr{L}^\dagger\tilde{p}(z) = \tilde{p}(z)(\sum_{b=1}^N z^{m_b}E_{bb})$ se puede obtener una relación de recurrencia para $\tilde{p}_i$.

Finalmente, de (2.46) , y aplicando las ideas de la proposición 2.10 obtenemos

Proposición 3.28. *Se satisfacen las siguientes condiciones de simetría*

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial t_{jn_a,a}} + \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_{jm_a,a}} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_{jn_a,a}} + \sum_{a=1}^N \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}_{jm_a,a}} = 0,\\
\sum_{a=1}^N \frac{\partial C_{bb}}{\partial t_{jn_a,a}} + \sum_{a=1}^N \frac{\partial C_{bb}}{\partial \tilde{t}_{jm_a,a}} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial \tilde{C}_{bb}}{\partial t_{jn_a,a}} + \sum_{a=1}^N \frac{\partial \tilde{C}_{bb}}{\partial \tilde{t}_{jm_a,a}} = 0,
\end{aligned}
$$

para $j \geq 1$ *y* $b = 1, \ldots, N$.

Capítulo 4

El caso múltiplemente ortogonal

El objetivo de este capítulo es la construcción de una factorización de Gauss-Borel apropiada para el grupo de las matrices semi-infinitas invertibles que conducen tanto a una familia de polinomios múltiplemente ortogonales como a la integrabilidad del sistema resultante. La principal ventaja de este enfoque descansa en la aplicación de diferentes técnicas basadas en problemas de factorización usadas frecuentemente en la teoría de sistemas integrables.

Para hacer una presentación de lo que son los polinomios múltiplemente ortogonales supongamos un intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$ de la recta real. Sea $\mathcal{M}(\Delta)$ el conjunto de todas las medidas finitas de Borel soportadas en infinitos puntos en Δ, y que tienen signo constante. Fijemos $\mu \in \mathcal{M}(\Delta)$, y consideremos un sistema de pesos $\vec{w} = (w_1, \dots, w_p)$ en Δ, con $p \in \mathbb{N}$. En general un "peso" en un intervalo Δ designa a una función integrable real definida en Δ tal que no cambia su signo en Δ, pero también utilizaremos pesos complejos en el capítulo 5. Dado un multi-índice $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, y definiendo $|\vec{\nu}| = \nu_1 + \dots + \nu_p$, supongamos que existen polinomios, $A_1, \dots, A_p$, no todos nulos que satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\int_\Delta x^j \sum_{a=1}^{p} A_a(x) w_a(x) d\mu(x) = 0, \qquad \deg A_a \leq \nu_a - 1, \qquad j = 0, \dots, |\vec{\nu}| - 2. \tag{4.1}$$

Análogamente, supongamos que existe un polinomio B no nulo tal que

$$\int_\Delta x^j B(x) w_b(x) d\mu(x) = 0, \qquad \deg B \leq |\vec{\nu}| - 1, \qquad j = 0, \dots, \nu_b - 1, \quad b = 1, \dots, p. \tag{4.2}$$

Los polinomios que resultan de resolver el problema se designan como de tipo I y tipo II, respectivamente, con respecto a la combinación $(\mu, \vec{w}, \vec{\nu})$ de la medida μ, el sistema de pesos $\vec{w}$ y el multi-índice $\vec{\nu}$. Cuando $p = 1$ ambas definiciones coinciden con la definición estándar de polinomios ortogonales en la recta real. De la teoría de polinomios ortogonales sabemos que cuando $p = 1$ todos los polinomios de una familia ortogonal tienen grado máximo; sin embargo si $p > 1$ esto no es cierto en general. Dada una medida $\mu \in \mathcal{M}(\Delta)$ y un sistema de pesos $\vec{w}$ en Δ decimos que un multi-índice $\vec{\nu}$ es normal de tipo I o de tipo II si $\deg A_a$ es exactamente igual que $\nu_a - 1$, $a = 1, \dots, p$, o si $\deg B$ es igual a $|\vec{\nu}| - 1$, respectivamente. Cuando para un par $(\mu, \vec{w})$ todos los multi-índices son normales de tipo I o de tipo II, entonces el par se denomina perfecto de tipo I o de tipo II, respectivamente. Los conceptos de normalidad y perfección fueron introducidos por Malher (ver los artículos de Malher, Coates y Jager citados antes).

Lo que será de más interés para nosotros serán los polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto. Para definir estos polinomios necesitamos dos sistemas de pesos $\vec{w}_1 = (w_{1,1}, \dots, w_{1,p_1})$ y $\vec{w}_2 = (w_{2,1}, \dots, w_{2,p_2})$ donde $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, y dos multi-índices $\vec{\nu}_1 = (\nu_{1,1}, \dots, \nu_{1,p_1}) \in \mathbb{Z}_+^{p_1}$ y $\vec{\nu}_2 = (\nu_{2,1}, \dots, \nu_{2,p_2}) \in \mathbb{Z}_+^{p_2}$ con $|\vec{\nu}_1| = |\vec{\nu}_2| + 1$. Suponemos en este caso que existen polinomios $A_1, \dots, A_{p_1}$, no todos nulos, tales que $\deg A_s < \nu_{1,s}$ que satisfacen las siguientes relaciones

$$\int_\Delta \sum_{a=1}^{p_1} A_a(x) w_{1,a}(x) w_{2,b}(x) x^j d\mu(x) = 0, \quad j = 0, \dots, \nu_{2,b} - 1, \quad b = 1, \dots, p_2. \tag{4.3}$$

Los A_a se llaman polinomios múltiplemente ortogonales con respecto a la siguiente combinación $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)$ de la medida μ, los sistemas de pesos $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ y los multi-índices $\vec{\nu}_1$ y $\vec{\nu}_2$. En este caso podemos ver que encontrar los coeficientes de los polinomios $A_1, \dots, A_{p_1}$ equivale a resolver un sistema de $|\vec{\nu}_2|$ ecuaciones lineales homogéneas para $|\vec{\nu}_1|$ coeficientes indeterminados. Debido a que $|\vec{\nu}_1| = |\vec{\nu}_2| + 1$ el sistema tiene siempre solución no trivial. La matriz de este sistema de ecuaciones se llama también matriz de momentos y el estudio de su factorización de Gauss-Borel es el eje central del capítulo 4. En el caso particular $p_1 = 1$ tenemos los llamados polinomios múltiplemente ortogonales de tipo II y para el caso $p_2 = 1$ lo que obtenemos son los polinomios de tipo I. Cuando dada una combinación $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$, de una medida $\mu \in \mathcal{M}(\Delta)$ y dos sistemas de pesos $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ en Δ éstos son tales que para cada par de multi-índices $(\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)$ las condiciones (4.3) determinan que $\deg A_a = \nu_{1,a} - 1$, $a = 1, \dots, p_1$, entonces decimos que la combinación $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ es perfecta.

El resultado principal de este capítulo es la caracterización de una matriz semi-infinita de momentos cuya factorización permite la construcción de una familia de polinomios múltiplemente ortogonales. Esta técnica tiene sentido cuando se puede realizar dicha factorización, que veremos que es el caso para combinaciones perfectas $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$, y nos permite definir algunos conjuntos de polinomios múltiplemente ortogonales (que llamaremos escaleras) de la misma forma que se ha hecho en el capítulo 3 para polinomios matriciales.

La factorización de Gauss conduce en este caso a resultados como relaciones de recurrencia, teoremas de tipo ABC, y fórmulas de Christoffel-Darboux. Los dos primeros son nuevos tal y como se presentan aquí, mientras que el tercero ya se obtuvo en [38] a través de un problema de Riemann-Hilbert para polinomios múltiplemente ortogonales. Sin embargo, nuestra demostración de la fórmula de Christoffel-Darboux se basa exclusivamente en la factorización de Gauss-Borel y elementos de tipo algebraico; su existencia y unicidad son los únicos elementos que se necesitan para la existencia del problema de ortogonalidad múltiple. Por lo tanto, tal y como se verá, es suficiente tener una combinación perfecta $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$, y no son necesarias condiciones de analiticidad para los pesos que requeriría un problema de Riemann-Hilbert bien definido en el sentido de [38]. Todo esto es el objetivo de la sección 4.1.

En la sección 4.2 buscamos la jerarquía integrable adecuada para el caso de la ortogonalidad múltiple y esto obliga a considerar una versión de la red de Toda bidimensional multi-componente que extiende la construcción de la jerarquía multi-componente de KP de M. J. Bergvelt y A. P. E. ten Kroode en [21]. Esta jerarquía es de tipo escalar, a diferencia de la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente descrita en [118] o en [87], que es la descrita en el capítulo 2. En la línea de [87] y tal y como se hizo en el capítulo 2 se complementan los flujos continuos de la jerarquía integrable con flujos discretos, que se pueden ver como casos particulares de transformaciones de Darboux. Estos nuevos parámetros de evolución discreta corresponden también a transformaciones de Miwa en las que se añaden ceros o polos al conjunto de pesos. La simetría de tipo Hankel está relacionada con la invariancia bajo un cierto número de flujos temporales y con determinadas *string equations*, tal y como se comentó en la sección 2.3; aquí trasladamos estos resultados a los polinomios múltiplemente ortogonales.

Por último, la formulación de la jerarquía integrable en términos de factorización también permite deducir otras representaciones como la ligada a la llamada ecuación bilineal o la representación en términos de las llamadas funciones τ. Esto último sirve de enlace con los resultados de [7], trabajo que también estudia la estructura integrable de las familias de polinomios múltiplemente ortogonales, pero en el que no se utilizan técnicas de factorización. Lo que se hace en [7] es conectar los polinomios múltiplemente ortogonales con jerarquías integrables a través de las funciones τ y la ecuación bilineal.

4.1. La factorización LU para polinomios múltiplemente ortogonales

4.1.1. La matriz de momentos

Vamos a trabajar con los siguientes multi-índices de enteros positivos $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$, donde $p \in \mathbb{N}$ y $n_a \in \mathbb{Z}_+$, $a = 1, \dots, p$; como es habitual definimos $|\vec{n}| := n_1 + \cdots + n_p$. Siguiendo a [21, 112] vemos que cualquier $i \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ determina de forma unívoca ciertos enteros no negativos $q(i), a(i), r(i)$, tales que se verifica la siguiente descomposición

$$i = q(i)|\vec{n}| + n_1 + \cdots + n_{a(i)-1} + r(i), \qquad 0 \le r(i) < n_{a(i)}. \tag{4.4}$$

Por lo tanto, dado un i existe un único $k(i)$ con

$$k(i) = q(i)n_{a(i)} + r(i), \qquad 0 \le r(i) < n_{a(i)}. \tag{4.5}$$

Si introducimos la función parte entera $[\cdot] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{Z}_+$, $[x] = \max\{y \in \mathbb{Z}_+, y \le x\}$, combinando (4.4) y (4.5) obtenemos una fórmula donde se recoge explícitamente la dependencia entre las cantidades i, k y a

$$i = \left[\frac{k}{n_a}\right](|\vec{n}| - n_a) + n_1 + \cdots + n_{a-1} + k. \tag{4.6}$$

Sea $\mathbb{R}^\infty$ el espacio vectorial de sucesiones con elementos en $\mathbb{R}$. Un elemento $\lambda \in \mathbb{R}^\infty$ se puede interpretar como un vector columna semi-infinito tal y como sigue

$$\lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots)^\top, \qquad \lambda^{(j)} \in \mathbb{R}, \qquad j = 0, 1, \dots.$$

Consideremos también el conjunto $\{e_j\}_{j\ge 0} \subset \mathbb{R}^\infty$ con su definición habitual

$$e_j = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{j}, 1, 0, 0, \dots)^\top.$$

Análogamente denotamos por $(\mathbb{R}^p)^\infty$ al conjunto de todas las sucesiones de vectores con p componentes y observamos que cada secuencia que pertenece a $(\mathbb{R}^p)^\infty$ se puede entender como un vector columna semi-infinito. Dada la sucesión de vectores $(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots)$ con $\vec{v}_j = (v_{j,1}, \dots, v_{j,p})^\top$ tenemos la sucesión correspondiente en $\mathbb{R}^\infty$ dada por $(v_{0,1} \dots, v_{0,p}, v_{1,1}, \dots, v_{1,p}, \dots)$; es decir,

$\mathbb{R}^\infty \cong (\mathbb{R}^p)^\infty$. Por lo tanto, consideramos también el conjunto $\{e_a(k)\}_{\substack{a=1,\dots,p\\k=0,1,\dots}} \subset (\mathbb{R}^p)^\infty$ en el que cada par $(a,k) \in \{1,\dots,p\} \times \mathbb{Z}_+$ es tal que $e_a(k) = e_{i(k,a)}$ para la función $i(a,k) \in \mathbb{Z}_+$ de (4.6).

También es necesario introducir algunos objetos auxiliares asociados al espacio $\mathbb{R}^\infty$. Entre ellos tenemos la matriz identidad $\mathbb{I} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k e_k^\top$, la matriz de desplazamiento $\Lambda := \sum_{k=0}^{\infty} e_k e_{k+1}^\top$ y las proyecciones $\Pi^{[l]} := \sum_{k=0}^{l-1} e_k e_k^\top$. Con la ayuda del conjunto $\{e_a(k)\}_{\substack{a=1,\dots,p\\k=0,1,\dots}}$ construimos las proyecciones "por componentes" $\Pi_a := \sum_{k=0}^{\infty} e_a(k) e_a(k)^\top$ con $\sum_{a=1}^{p} \Pi_a = \mathbb{I}$, y

$$P_1 := \operatorname{diag}(\mathbb{I}_{n_1}, 0_{n_2}, \dots, 0_{n_p}), \quad P_2 := \operatorname{diag}(0_{n_1}, \mathbb{I}_{n_2}, \dots, 0_{n_p}), \quad \dots \quad P_p := \operatorname{diag}(0_{n_1}, 0_{n_2}, \dots, \mathbb{I}_{n_p}), \tag{4.7}$$

donde $\mathbb{I}_{n_s}$ es la matriz identidad $n_s \times n_s$. Con esto podemos definir

$$x^{\vec{n}} := x^{n_1} P_1 + \cdots + x^{n_p} P_p = \operatorname{diag}(x^{n_1}\mathbb{I}_{n_1}, \dots, x^{n_p}\mathbb{I}_{n_p}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{|\vec{n}|\times|\vec{n}|}. \tag{4.8}$$

Por último es necesario definir las siguientes sucesiones de monomios

$$\chi_a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} e_a(k) z^k, \qquad \chi_a^{(l)}(z) = \begin{cases} z^{k(l)}, & a = a(l), \\ 0, & a \neq a(l), \end{cases} \qquad \chi_a^*(z) : = z^{-1}\chi_a(z^{-1}), \tag{4.9}$$

estos vectores pueden entenderse como sucesiones de monomios adaptados a la composición $\vec{n}$ introducida previamente. También definimos las sucesiones

$$\xi := \sum_{a=1}^{p} \chi_a w_a, \qquad \xi^{(l)}(z) = w_{a(l)}(z) z^{k(l)}, \tag{4.10}$$

que son sucesiones de monomios multiplicados por ciertos pesos asociados a cada composición $\vec{n}$. Cuando sea conveniente indicar explícitamente la dependencia de la composición elegida escribiremos $\chi_{\vec{n},a}, \chi_{\vec{n}}$ y $\xi_{\vec{n}}$.

Para definir la matriz de momentos vamos a utilizar una medida finita y de Borel $\mu \in \mathcal{M}(\Delta)$, dos sistemas de pesos $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ en $\Delta \subset \mathbb{R}$, y las siguientes composiciones $\vec{n}_1 = (n_{1,1}, \dots, n_{1,p_1}) \in \mathbb{N}^{p_1}$ y $\vec{n}_2 = (n_{2,1}, \dots, n_{2,p_2}) \in \mathbb{N}^{p_2}$ [112]. Dados los monomios con pesos $\xi_{\vec{n}_1}$ y $\xi_{\vec{n}_2}$, asociados a las composiciones $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, hacemos la siguiente definición

Definición 4.1. La matriz de momentos para el problema está dada por

$$g_{\vec{n}_1,\vec{n}_2} := \int \xi_{\vec{n}_1}(x) \xi_{\vec{n}_2}(x)^\top d\mu(x). \tag{4.11}$$

En términos de la base canónica $\{E_{i,j}\}$ del espacio vectorial de matrices semi-infinitas y para cada par $(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2$ consideramos las permutaciones binarias $\pi_{i,j} = \mathbb{I} - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$. Es evidente que $\pi_{i,j}^2 = \mathbb{I}$ y por lo tanto $\pi_{i,j}^{-1} = \pi_{i,j}$. Dadas dos permutaciones $\pi_{i,j}$ y $\pi_{k,l}$ está bien definida la composición de las dos y su matriz viene representada por $\pi_{i,j}\pi_{k,l} = \pi_{k,l}\pi_{i,j}$. Dada una sucesión de pares $I = \{(i_s, j_s)\}_{s\in\mathbb{Z}_+}$, $i_s, j_s \in \mathbb{Z}_+$, definimos la permutación π_I como el producto infinito $\pi_I = \prod_{s\in\mathbb{Z}_+} \pi_{i_s,j_s}$, con $\pi_I \pi_I^\top = \pi_I^\top \pi_I = \mathbb{I}$. Dadas dos composiciones, $\vec{n}', \vec{n}$, existe una permutación $\pi_{\vec{n}',\vec{n}}$ tal que $\xi_{\vec{n}'} = \pi_{\vec{n}',\vec{n}} \xi_{\vec{n}}$ a través de una permutación representada por una matriz semi-infinita como las introducidas anteriormente.

Proposición 4.2. *Dados dos conjuntos de pesos $\vec{w}_\ell = (w_{\ell,1}, \dots, w_{\ell,p_\ell})$ y dos composiciones $\vec{n}_\ell$ y $\vec{n}'_\ell$, $\ell = 1, 2$, existen matrices de permutación $\pi_{\vec{n}'_\ell,\vec{n}_\ell}$ tales que*

$$g_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2} = \pi_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1} g_{\vec{n}_1,\vec{n}_2} \pi_{\vec{n}'_2,\vec{n}_2}^\top. \tag{4.12}$$

Demostración. Para cualquier conjunto de pesos $\vec{w} = (w_1, \dots, w_p)$ y dos composiciones $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tenemos que los correspondientes vectores de monomios con pesos están relacionados a través de una permutación semi-infinita de modo que verifican $\xi_{\vec{n}'} = \pi_{\vec{n}',\vec{n}}\xi_{\vec{n}}$. Como $\pi^{\top}_{\vec{n}',\vec{n}} = \pi^{-1}_{\vec{n}',\vec{n}}$ hemos probado el resultado propuesto. □

Para simplificar la notación, habitualmente omitiremos los subíndices que indican las dos composiciones y escribiremos simplemente g para referirnos a la matriz de momentos.

Discutamos con más detalle la estructura Hankel por bloques de la matriz de momentos. Para cada par $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_+$ existe una única combinación de otros tres pares $(q_1,q_2) \in \mathbb{Z}^2_+$, $(a_1,a_2) \in \{1,\dots,p_1\} \times \{1,\dots,p_2\}$ y $(r_1,r_2) \in \{0,\dots,n_{1,a_1}-1\} \times \{0,\dots,n_{2,a_2}-1\}$, tales que

$$i = q_1|\vec{n}_1| + n_{1,1} + \ldots + n_{1,a_1-1} + r_1 \quad \text{y} \quad j = q_2|\vec{n}_2| + n_{2,1} + \ldots + n_{2,a_2-1} + r_2.$$

Por lo tanto, tomando $k_\ell = q_\ell n_{\ell,a_\ell} + r_\ell$, $\ell = 1,2$, los coeficientes $g_{i,j} \in \mathbb{R}$ de la matriz de momentos $g = (g_{i,j})$ tienen la siguiente forma explícita

$$g_{i,j} = \int x^{k_1+k_2} w_{1,a_1}(x) w_{2,a_2}(x) d\mu(x), \tag{4.13}$$

donde los pares (k_1,a_1) y (k_2,a_2) están determinados unívocamente por i y j respectivamente.

Podemos dar otra expresión alternativa para g. Para ello empleamos las siguientes matrices $n_{1,a} \times n_{2,b}$

$$m_{a,b}(x) = w_{1,a}(x) w_{2,b}(x) \begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n_{2,b}-1} \\ x & x^2 & \cdots & x^{n_{2,b}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n_{1,a}-1} & x^{n_{1,a}} & \cdots & x^{n_{1,a}+n_{2,b}-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a &= 1,\dots,p_1, \\ b &= 1,\dots,p_2, \end{aligned} \tag{4.14}$$

en términos de los cuales construimos la matriz m

$$m := \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p_2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p_1,1} & m_{p_1,2} & \cdots & m_{p_1,p_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|\vec{n}_1| \times |\vec{n}_2|}. \tag{4.15}$$

Con ella obtenemos la expresión buscada

$$g := (G_{i,j})_{i,j \geq 0} \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty}, \qquad G_{i,j} := \int x^{i\vec{n}_1} m(x) x^{j\vec{n}_2} d\mu(x) \in \mathbb{R}^{|\vec{n}_1| \times |\vec{n}_2|}. \tag{4.16}$$

Para terminar este apartado vamos a estudiar como la matriz definida está relacionada con un problema de ortogonalidad múltiple. Si fijamos ahora un número $l \in \mathbb{N}$ y consideramos el par $(l, l+1)$, existe un único conjunto de pares $(q_1,q_2) \in \mathbb{Z}^2_+$, $(a_1,a_2) \in \{1,\dots,p_1\} \times \{1,\dots,p_2\}$ y $(r_1,r_2) \in \{0,\dots,n_{1,a_1}-1\} \times \{0,\dots,n_{2,a_2}-1\}$, tales que

$$l = q_1|\vec{n}_1| + n_{1,1} + \cdots + n_{1,a_1-1} + r_1 \quad \text{y} \quad l+1 = q_2|\vec{n}_2| + n_{2,1} + \cdots + n_{2,a_2-1} + r_2.$$

Dadas las composiciones $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ definimos los siguientes multi-índices de grado $\vec{\nu}_1 \in \mathbb{Z}^{p_1}_+$ y $\vec{\nu}_2 \in \mathbb{Z}^{p_2}_+$ [21] en los que para cada $\ell = 1,2$, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{\nu}_\ell &= (\nu_{\ell,1}, \dots, \nu_{\ell,a_\ell-1}, \nu_{\ell,a_\ell}, \nu_{\ell,a_\ell+1}, \dots, \nu_{\ell,p_\ell}) \\ &= ((q_\ell+1)n_{\ell,1}, \dots, (q_\ell+1)n_{\ell,a_\ell-1}, q_\ell n_{\ell,a_\ell} + r_\ell, q_\ell n_{\ell,a_\ell+1}, \dots, q_\ell n_{\ell,p_\ell}), \end{aligned} \tag{4.17}$$

que satisfacen

$$k_\ell(i+1)=\nu_{\ell,a_\ell(i)}(i), \qquad |\vec{\nu}_\ell(i)|=i+1, \qquad \vec{\nu}_\ell(i+l|\vec{n}_\ell|)=\vec{\nu}_\ell(i)+l\vec{n}_\ell. \tag{4.18}$$

Consideremos el siguiente bloque $l\times(l+1)$ de g

$$\Gamma_l=\begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l}\\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l}\end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Nos interesa estudiar el sistema lineal homogéneo $\Gamma_l x_{l+1}=0_l$, donde $x_{l+1}\in\mathbb{R}^{l+1}$ y 0_{l+1} es el vector nulo de $\mathbb{R}^{l+1}$. Teniendo en cuenta la estructura de Γ_l (4.13), vemos que el sistema de ecuaciones lineales es exactamente la expresión de las relaciones de ortogonalidad (4.3). Para cada $l\in\mathbb{N}$ está asegurada la existencia de un sistema de polinomios múltiplemente ortogonales mixtos $(A_1^{(l)},\dots,A_{p_1}^{(l)})$; esto se debe a que Γ_l en (4.19) es una matriz $l\times(l+1)$, y la ecuación matricial homogénea $\Gamma_l x_{l+1}=0_l$, corresponde a un sistema homogéneo de l ecuaciones lineales para $l+1$ incógnitas. El sistema tiene por lo tanto solución no trivial. Obviamente, la solución $(A_1^{(l)},\dots,A_{p_1}^{(l)})$ no está unívocamente determinada por la ecuación matricial $\Gamma_l x_{l+1}=0_l$ o equivalentemente por las relaciones de ortogonalidad (4.3), ya que el espacio de soluciones tiene al menos dimensión 1. La cuestión apropiada que hay que considerar es la unicidad de la solución salvo multiplicación por constantes, o lo que es equivalente, si el espacio de soluciones tiene exactamente dimensión 1. En términos de Γ_l la pregunta es si esta matriz rango l. Para poder dar una respuesta positiva es suficiente asegurar que la matriz cuadrada $l\times l$

$$g^{[l]}:=\begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1}\\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1}\end{pmatrix}, \qquad l\geq 1, \tag{4.20}$$

sea invertible. Esta condición de invertibilidad se satisface cuando los polinomios $(A_1^{(l)},\dots,A_{p_1}^{(l)})$ cumplen $\deg A_j=\nu_{1,j}-1$, $j=1,\dots,p_1$.

4.1.2. La factorización de Gauss-Borel

Introducimos ahora el concepto de combinación perfecta

Definición 4.3. Supongamos que tenemos una combinación $(\mu,\vec{w}_1,\vec{w}_2)$ de una medida $\mu\in\mathcal{M}(\Delta)$ y dos sistemas de pesos $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ soportados en $\Delta\subset\mathbb{R}$. Decimos que esta combinación es perfecta si para cada par de multi-índices $(\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2)$, tales que $|\vec{\nu}_1|=|\vec{\nu}_2|+1$ las relaciones de ortogonalidad (4.3) poseen una solución que cumple $\deg A_a=\nu_{1,a}-1$, $a=1,\dots,p_1$.

Para una combinación perfecta $(\mu,\vec{w}_1,\vec{w}_2)$, dado un $l\in\mathbb{Z}_+$ el espacio de soluciones de la ecuación $\Gamma_l x_{l+1}=0_l$ es de dimensión 1. Entonces se puede determinar un único sistema de polinomios ortogonales de tipo mixto $(A_1,\dots,A_{p_1})$ que satisfagan (4.3) y además que para $a_1\in\{1,\dots p_1\}$ el polinomio A_{a_1} sea mónico. En la linea de [38] llamamos a este convenio normalización de tipo II con respecto a la componente a_1. Designaremos a esta familia de polinomios como $A_a^{(\mathrm{II},a_1)}$, $a = 1, \dots, p_1$.

De forma alternativa, si el sistema es perfecto, podemos deducir a partir de (4.3) que

$$\int x^{\nu_{2,b_2}} \sum_{a=1}^{p_1} A_a(x) w_{1,a}(x) w_{2,b_2}(x) d\mu(x) \neq 0. \tag{4.21}$$

Entonces se puede determinar un único sistema de polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto $(A_1^{(\mathrm{I},b_2)}, \dots, A_{p_2}^{(\mathrm{I},b_2)})$ al que además imponemos que

$$\int x^{\nu_{2,b_2}} \sum_{a=1}^{p_1} A_a^{(\mathrm{I},b_2)}(x) w_{1,a}(x) w_{2,b_2}(x) d\mu(x) = 1,$$

que llamamos normalización de tipo I. Denotaremos por $A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}^{(\mathrm{II},a_1)}$ y $A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}^{(\mathrm{I},b_2)}$ a las familias de polinomios ortogonales con las normalizaciones de tipo II y I respectivamente para los multiindices de grado $(\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)$.

Se pueden construir ejemplos conocidos de combinaciones perfectas $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ a partir de una medida finita de Borel positiva arbitraria μ y sistemas de pesos exponenciales

$$(\mathrm{e}^{\gamma_1 x}, \dots, \mathrm{e}^{\gamma_p x}), \qquad \gamma_i \neq \gamma_j, \qquad i \neq j, \qquad i,j = 1, \dots, p, \tag{4.22}$$

con funciones binomiales

$$((1-z)^{\alpha_1}, \dots, (1-z)^{\alpha_p}), \qquad \alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z}, \qquad i \neq j, \qquad i,j = 1, \dots, p. \tag{4.23}$$

o combinando las dos clases, (ver [95]). Recientemente se ha probado que una amplia clase de sistemas de pesos son perfectos [52]; estos sistemas, llamados ahora sistemas de Nikishin, fueron introducidos por E.M. Nikishin [95] y se llamaban inicialmente MT-sistemas (de Markov-Tchebichev).

Dada una combinación perfecta $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ realizamos un proceso de factorización en la linea de [3] y [4]

Definición 4.4. El problema de factorización de Gauss-Borel (factorización LU o factorización gaussiana) de una matriz semi-infinita g, determinada por $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$, es el problema de encontrar la solución de

$$g = S^{-1}\tilde{S}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ S_{1,0} & 1 & 0 & \cdots \\ S_{2,0} & S_{2,1} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{S}'_{0,0} & \tilde{S}'_{0,1} & \tilde{S}'_{0,2} & \cdots \\ 0 & \tilde{S}'_{1,1} & \tilde{S}'_{1,2} & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{S}'_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad S_{i,j}, \tilde{S}'_{i,j} \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

En términos de estas matrices construimos los polinomios

$$A_a^{(l)}(x) := \sum\nolimits_i' S_{l,i} x^{k_1(i)}, \tag{4.25}$$

donde la suma $\sum'$ se hace para un $a = 1, \dots, p_1$ fijo sobre aquellos i tales que $a = a_1(i)$ y además $i \leq l$. También construimos los polinomios duales

$$\tilde{A}_b^{(l)}(x) := \sum\nolimits_j' x^{k_2(j)} \tilde{S}'_{j,l}, \tag{4.26}$$

en los que la suma $\sum'$ se hace para un b dado sobre aquellos j para los que $b = a_2(j)$ y $j \leq l$.

Esta factorización tiene sentido cuando todos los menores principales de g son no nulos, es decir, si $\det g^{[l]} \neq 0$, $l = 1, 2, \dots$, y en nuestro caso esto se verifica porque $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ es una combinación perfecta.

Una vez construida la factorización, de puede comprobar que los siguientes conjuntos

$$G_- := \left\{ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ S_{1,0} & 1 & 0 & \cdots \\ S_{2,0} & S_{2,1} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, S_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}, \quad G_+ := \left\{ \tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{0,0} & \tilde{S}_{0,1} & \tilde{S}_{0,2} & \cdots \\ 0 & \tilde{S}_{1,1} & \tilde{S}_{1,2} & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tilde{S}_{i,j} \in \mathbb{R}, \tilde{S}_{i,i} \neq 0 \right\} \tag{4.27}$$

son grupos. El problema está en que la multiplicación de dos matrices semi-infinitas arbitrarias no está en general bien definida, ya que implica la aparición de series; sin embargo si las dos matrices están en G_-, las series mencionadas se reducen a una suma finita, y lo mismo para G_+. Además, se puede ver que la inversa de una matriz en $S \in G_-$ está también G_-, y lo mismo se puede decir para G_+. Dados dos elementos $S \in G_-$ y $\tilde{S} \in G_+$ los coeficientes del producto $S\tilde{S}$ son sumas finitas, sin embargo, este no es el caso para $\tilde{S}S$, donde los coeficientes son series. Por lo tanto, dado un elemento factorizable $g = S^{-1}\tilde{S}$ no podemos asegurar que g, considerada como matriz infinita tenga inversa. Hay que observar entonces que a pesar de la existencia de S y $\tilde{S}^{-1}$, la existencia de $\tilde{S}^{-1}S = g^{-1}$ no está asegurada porque este producto implica la evaluación de series en vez de sumas finitas.

Con el uso de los coeficientes de las matrices S y $\tilde{S}$ construimos polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto con normalizaciones de tipo II y de tipo I respectivamente.

Proposición 4.5. *Tenemos las siguientes identificaciones*

$$A_a^{(l)} = A^{(\mathrm{II}, a_1(l))}_{[\vec{\nu}_1(l); \vec{\nu}_2(l-1)], a} \qquad \tilde{A}_b^{(l)} = A^{(\mathrm{I}, a_1(l))}_{[\vec{\nu}_2(l); \vec{\nu}_1(l-1)], b} \tag{4.28}$$

en términos de polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto con las normalizaciones de tipo II *y* I*, respectivamente.*

Demostración. De la factorización LU deducimos

$$\sum_{i=0}^{l} S_{l,i} g_{i,j} = 0, \qquad j = 0, 1, \dots, l-1, \qquad S_{i,i} := 1. \tag{4.29}$$

Con la ayuda de (4.17) y (4.25) expresamos (4.29) como sigue

$$\int \Big(\sum_{a=1}^{p_1} A_a^{(l)}(x) w_{1,a}(x) \Big) w_{2,b}(x) x^k d\mu(x) = 0, \qquad \deg A_a^{(l)} \leq \nu_{1,a}(l) - 1, \qquad 0 \leq k \leq \nu_{2,b}(l-1) - 1. \tag{4.30}$$

Reconocemos estas ecuaciones como aquellas que definen un conjunto de polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto tal y como está discutido en [38]. Este hecho conduce a $A_{[\vec{\nu}_1; \vec{\nu}_2], a} := A_a^{(l)}$ donde $\vec{\nu}_1 = \vec{\nu}_1(l)$ y $\vec{\nu}_2 = \vec{\nu}_2(l-1)$. Para un l dado, cada polinomio $A_{[\vec{\nu}_1; \vec{\nu}_2], a}$ tiene como mucho $\nu_{1,a}(l)$ coeficientes, y por lo tanto tenemos $|\vec{\nu}_1(l)| = l+1$ incógnitas para un sistema de $|\vec{\nu}_2(l-1)| = l$ ecuaciones. Además, de la condición de normalización $S_{i,i} = 1$ obtenemos que el polinomio $A_{[\vec{\nu}_1; \vec{\nu}_2], a_1(l)}$ es mónico con $\deg A_{[\vec{\nu}_1; \vec{\nu}_2], a_1(l)} = \nu_{1, a_1(l)}(l) - 1 = k_1(l+1) - 1$, que es la definición de normalización de tipo II y por lo tanto podemos identificar $A_a^{(l)} = A^{(\mathrm{II}, a_1(l))}_{[\vec{\nu}_1; \vec{\nu}_2], a}$.

Las ecuaciones duales de (4.29) son

$$\sum_{j=0}^{l} g_{i,j}\tilde{S}'_{j,l} = 0, \qquad i = 0, 1, \dots, l-1, \tag{4.31}$$

$$\sum_{j=0}^{l} g_{l,j}\tilde{S}'_{j,l} = 1. \tag{4.32}$$

Si usamos de nuevo (4.17) y (4.26), las ecuaciones (4.31) se transforman

$$\int \Big(\sum_{b=1}^{p_2} \tilde{A}_b^{(l)}(x) w_{2,b}(x)\Big) w_{1,a}(x) x^k d\mu(x) = 0, \qquad \deg \tilde{A}_b^{(l)} \leq \nu_{2,b}(l) - 1, \tag{4.33}$$
$$0 \leq k \leq \nu_{1,a}(l-1) - 1,$$

mientras que (4.32) se escribe como

$$\int \Big(\sum_{b=1}^{p_2} \tilde{A}_b^{(l)}(x) w_{2,b}(x)\Big) w_{1,a_1(l)}(x) x^{k_1(l)} d\mu(x) = 1, \tag{4.34}$$

y de (4.18) obtenemos

$$k_1(l) = \nu_{1,a_1(l)}(l-1). \tag{4.35}$$

Al igual que antes, estas ecuaciones caracterizan a una familia de polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto $\tilde{A}_b^{(l)} = \tilde{A}_{[\vec{\nu}_2;\vec{\nu}_1],b}$, con $\vec{\nu}_1 = \vec{\nu}_1(l-1)$ y $\vec{\nu}_2 = \vec{\nu}_2(l)$, que ahora tiene de forma natural una normalización de tipo I y consecuentemente obtenemos para esta familia que $\tilde{A}_b^{(l)} = \tilde{A}^{(\mathrm{I},a_1(l))}_{[\vec{\nu}_2;\vec{\nu}_1],b}$. □

Dada una medida finita de Borel positiva o que al menos mantiene su signo, el conjunto correspondiente de polinomios ortogonales mónicos asociados a ella $\{P_l\}_{l=0}^{\infty}$, $\deg P_l = l$, se pueden ver como una "escalera" de polinomios, en la que para llegar a un grado dado es necesario avanzar l pasos. Para la ortogonalidad múltiple la situación es distinta ya que en vez de una cadena lo que tenemos es una red multidimensional de grados.

Consideremos que la combinación perfecta $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ y la correspondiente familia de polinomios múltiplemente ortogonales $\{A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}\}_{a=1}^{p_1}$, con grados tales que $|\vec{\nu}_1| = |\vec{\nu}_2| + 1$. Siempre existen composiciones $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ y un entero l con $|\vec{\nu}_1| = l+1$ y $|\vec{\nu}_2| = l$ tal que los polinomios $\{A_a^{(l)}\}_{a=1}^{p_1}$ coinciden con $\{A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}\}_{a=1}^{p_1}$. Por lo tanto el conjunto de polinomios múltiplemente ortogonales $\big\{\{A_a^{(k)}\}_{a=1}^{p_1}, k = 0, \dots, l\big\}$, se puede entender como una escalera que conduce al conjunto deseado de polinomios $\{A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}\}_{a=1}^{p_1}$ después de subir l pasos, de la misma forma que ocurre con el caso clásico (no múltiple).

La escalera utilizada queda determinada por el par de composiciones $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$. Sin embargo, en general no hay una única escalera, ya que hay varias sucesiones de multi-indices que tras varios pasos lleven a uno en concreto. Una escalera particular, que definimos como la más simple (más bien la más corta) $[\vec{\nu}_1; \vec{\nu}_2]$, está fijada por la elección $\vec{n}_1 = \vec{\nu}_1$ y $\vec{n}_2 = \vec{\nu}_2 + \vec{e}_{2,p_2}$ y existe siempre. Muchas de las expresiones que se deducirán después para polinomios múltiplemente ortogonales dependen exclusivamente de los enteros $(\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)$ y no de la escalera particular elegida, y por tanto de $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

4.1.3. Formas lineales y bi-ortogonalidad múltiple

Introducimos ahora las formas lineales asociadas a polinomios múltiplemente ortogonales tal y como sigue

Definición 4.6. Las sucesiones de formas lineales y formas lineales duales asociadas a los polinomios múltiplemente ortogonales son las siguientes

$$Q := \begin{pmatrix} Q^{(0)} \\ Q^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} = S\xi_1, \qquad \tilde{Q} := \begin{pmatrix} \tilde{Q}^{(0)} \\ \tilde{Q}^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} = (\tilde{S}^{-1})^{\top}\xi_2, \tag{4.36}$$

Se puede comprobar inmediatamente que

Proposición 4.7. *Las formas lineales y sus duales introducidas en la definición 4.6, están dadas por*

$$Q^{(l)}(x) := \sum_{a=1}^{p_1} A_a^{(l)}(x) w_{1,a}(x), \qquad \tilde{Q}^{(l)}(x) := \sum_{b=1}^{p_2} \tilde{A}_b^{(l)}(x) w_{2,b}(x). \tag{4.37}$$

Algunas veces usaremos la notación alternativa $Q^{(l)} = Q_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2]}$ y $\tilde{Q}^{(l)} = \tilde{Q}_{[\vec{\nu}_2;\vec{\nu}_1]}$.
Es también trivial comprobar lo siguiente

Proposición 4.8. *Se cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad*

$$\begin{aligned} &\int Q^{(l)}(x) w_{2,b}(x) x^k d\mu(x) = 0, \quad 0 \le k \le \nu_{2,b}(l-1) - 1, \quad b = 1, \dots, p_2, \\ &\int \tilde{Q}^{(l)}(x) w_{1,a}(x) x^k d\mu(x) = 0, \quad 0 \le k \le \nu_{1,a}(l-1) - 1, \quad a = 1, \dots, p_1. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Además tenemos que estas formas lineales son bi-ortogonales

Proposición 4.9. *Se verifican las siguientes relaciones de bi-ortogonalidad entre las formas lineales y sus duales*

$$\int Q^{(l)}(x)\tilde{Q}^{(k)}(x) d\mu(x) = \delta_{l,k}, \qquad l, k \ge 0. \tag{4.39}$$

Demostración. Veamos que se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_R Q(x)\tilde{Q}(x)^{\top} d\mu(x) &= \int S\xi_1(x)\xi_2(x)^{\top}\tilde{S}^{-1} d\mu(x) && \text{de (4.36)} \\ &= S\Big(\int \xi_1(x)\xi_2(x)^{\top} d\mu(x)\Big)\tilde{S}^{-1} \\ &= Sg\tilde{S}^{-1} && \text{de (4.11)} \\ &= \mathbb{I}. && \text{de (4.24)} \end{aligned}$$ □

Definición 4.10. Llamemos $\xi_i^{[l]}$, $i = 1, 2$ al vector truncado formado por las primeras l componentes de ξ_i.

Proposición 4.11. *Las formas lineales se pueden expresar en términos de las matrices truncadas de momentos* $g^{[l]}$ *de las siguiente formas equivalentes*

$$\begin{aligned}
Q^{(l)} &= \xi_1^{(l)} - \begin{pmatrix} g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} \end{pmatrix} (g^{[l]})^{-1}\xi_1^{[l]} \\
&= \tilde{S}_{l,l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} (g^{[l+1]})^{-1}\xi_1^{[l+1]} \\
&= \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \xi_1^{(0)} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \xi_1^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & \xi_1^{(l-1)} \\ \hline g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} & \xi_1^{(l)} \end{array}\right), \qquad l \geq 1, \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

y las formas duales como

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}^{(l)} &= (\tilde{S}_{l,l})^{-1}\Big(\xi_2^{(l)} - (\xi_2^{[l]})^\top (g^{[l]})^{-1} \begin{pmatrix} g_{0,l} & g_{1,l} & \cdots & g_{l-1,l} \end{pmatrix}^\top\Big) \\
&= (\xi_2^{[l+1]})^\top (g^{[l+1]})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top \\
&= \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,l} \\ \hline \xi_2^{(0)} & \xi_2^{(1)} & \cdots & \xi_2^{(l-1)} & \xi_2^{(l)} \end{array}\right), \qquad l \geq 0. \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

Demostración. Las relaciones de ortogonalidad se pueden organizar matricialmente de las siguientes formas equivalentes

$$\begin{pmatrix} S_{l,0} & S_{l,1} & \cdots & S_{l,l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} \end{pmatrix}, \quad l \geq 1, \tag{4.42}$$

$$\begin{pmatrix} S_{l,0} & S_{l,1} & \cdots & S_{l,l-1} & S_{l,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{S}_{l,l} \end{pmatrix}}_{l+1 \text{ componentes}}, \qquad l \geq 0. \tag{4.43}$$

De (4.36) obtenemos

$$\begin{aligned}
Q^{(l)} &= \sum_{k=0}^{l} S_{l,k}\xi_1^{(k)} \\
&= \xi_1^{(l)} - \begin{pmatrix} g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} \end{pmatrix} (g^{[l]})^{-1}\xi_1^{[l]} \qquad \text{usando (4.42)} \qquad (4.44) \\
&= \tilde{S}_{l,l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} (g^{[l+1]})^{-1}\xi_1^{[l+1]}. \qquad \text{usando (4.43)} \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

Se puede emplear el método de Cramer para resolver el sistema (4.42) y entonces

$$S_{l,i} = \frac{1}{\det g^{[l]}} \sum_{j=0}^{l-1} g_{l,j}(-1)^{i+j+1} M_{i,j}^{(l)} = \frac{(-1)^{i+l} M_{i,l}^{(l+1)}}{\det g^{[l]}}, \tag{4.46}$$

donde $M_{i,j}^{(l)}$ es el menor (i,j) de la matriz de momentos truncada $g^{[l]}$ definida en (4.20). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Q^{(l)} &= \frac{1}{\det g^{[l]}} \sum_{i=0}^{l} (-1)^{i+l} M_{i,l}^{(l+1)} \xi_1^{(i)} \\ &= \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \xi_1^{(0)} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \xi_1^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & \xi_1^{(l-1)} \\ \hline g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} & \xi_1^{(l)} \end{array} \right), \qquad l \geq 1. \end{aligned}$$

Las relaciones de ortogonalidad para el sistema dual se pueden escribir también de dos formas alternativas, esto es

$$\begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}'_{0,l} \\ \tilde{S}'_{1,l} \\ \vdots \\ \tilde{S}_{l-1,l} \end{pmatrix} = -(\tilde{S}_{l,l})^{-1} \begin{pmatrix} g_{0,l} \\ g_{1,l} \\ \vdots \\ g_{l-1,l} \end{pmatrix}, \qquad l \geq 1, \tag{4.47}$$

$$\begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}'_{0,l} \\ \tilde{S}'_{1,l} \\ \vdots \\ \tilde{S}'_{l,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad l \geq 0. \tag{4.48}$$

Como vimos antes, (4.36) conduce a las siguientes expresiones para las formas lineales duales

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{(l)} &= \sum_{k=0}^{l} \tilde{S}'_{k,l} \xi_2^{(k)} \\ &= (\tilde{S}_{l,l})^{-1} \Big(\xi_2^{(l)} - (\xi_2^{[l]})^\top (g^{[l]})^{-1} \begin{pmatrix} g_{0,l} & g_{1,l} & \cdots & g_{l-1,l} \end{pmatrix}^\top \Big) & \text{de (4.47)} \qquad (4.49) \\ &= (\xi_2^{[l+1]})^\top (g^{[l+1]})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top. & \text{de (4.48)} \qquad (4.50) \end{aligned}$$

De (4.48) obtenemos

$$\tilde{S}'_{j,l} = \big(g^{[l+1]^{-1}}\big)_{j,l} = \frac{(-1)^{l+j} M_{l,j}^{(l+1)}}{\det(g^{[l+1]})}, \quad j = 0, \ldots, l, \tag{4.51}$$

y consecuentemente

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}^{(l)} &= \sum_{j=0}^{l} \tilde{S}'_{j,l}\xi_2^{(j)} = \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l+j} M_{l,j}^{(l+1)} \xi_2^{(j)} \\
&= \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c}
g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,l} \\
g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,l} \\
\hline
\xi_2^{(0)} & \xi_2^{(1)} & \cdots & \xi_2^{(l-1)} & \xi_2^{(l)}
\end{array}\right), \qquad l \geq 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Obtenemos como corolarios las siguientes expresiones para los polinomios múltiplemente ortogonales y sus duales

Corolario 4.12. *Los polinomios múltiplemente ortogonales y sus duales tienen las siguientes expresiones alternativas*

$$
\begin{aligned}
A_a^{(l)} &= \chi_{1,a}^{(l)} - \begin{pmatrix} g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} \end{pmatrix} (g^{[l]})^{-1} \chi_{1,a}^{[l]} \\
&= \tilde{S}_{l,l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} (g^{[l+1]})^{-1} \chi_{1,a}^{[l+1]} \\
&= \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c}
g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \chi_{1,a}^{(0)} \\
g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \chi_{1,a}^{(1)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & \chi_{1,a}^{(l-1)} \\
\hline
g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} & \chi_{1,a}^{(l)}
\end{array}\right), \qquad l \geq 1. \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

y

$$
\tilde{A}_b^{(l)} = (\tilde{S}_{l,l})^{-1} \Big(\chi_{2,b}^{(l)} - (\chi_{2,b}^{[l]})^{\top} (g^{[l]})^{-1} \begin{pmatrix} g_{0,l} & g_{1,l} & \cdots & g_{l-1,l} \end{pmatrix}^{\top} \Big) \qquad (4.53)
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\chi_{2,b}^{[l+1]})^{\top} (g^{[l+1]})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top} \\
&= \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c}
g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,l} \\
g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,l} \\
\hline
\chi_{2,b}^{(0)} & \chi_{2,b}^{(1)} & \cdots & \chi_{2,b}^{(l-1)} & \chi_{2,b}^{(l)}
\end{array}\right), \qquad l \geq 0. \qquad (4.54)
\end{aligned}
$$

Como se puede ver, (4.51), implica que

$$
\tilde{S}_{l,l} = \frac{\det g^{[l+1]}}{\det g^{[l]}}. \qquad (4.55)
$$

4.1.4. Funciones de segunda especie

Las transformadas de Cauchy de las formas lineales de (4.37) tienen un papel esencial en el problema de Riemann-Hilbert asociado a los polinomios múltiplemente ortogonales de tipo mixto propuesto por Daems y Kuijlaars en [38]. Siguiendo el enfoque de Adler y van Moerbeke veremos que estas transformadas también están relacionadas con la factorización LU considerada en este trabajo.

La construcción hecha hasta ahora tiene como piezas fundamentales las siguientes cadenas o escaleras de polinomios múltiplemente ortogonales y sus duales

$$\mathscr{A}_a := \begin{pmatrix} A_a^{(0)} \\ A_a^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} = S\chi_{1,a}, \quad \tilde{\mathscr{A}}_b := \begin{pmatrix} \tilde{A}_b^{(0)} \\ \tilde{A}_b^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} = (\tilde{S}^{-1})^\top \chi_{2,b}, \quad a = 1, \dots, p_1, \quad b = 1, \dots, p_2. \tag{4.56}$$

Para completar estas fórmulas en términos de χ^* como en (4.9) consideramos los siguientes objetos complementarios

Definición 4.13. Introduzcamos los siguientes vectores formales semi-infinitos

$$\tilde{\mathscr{C}}_b = \begin{pmatrix} \tilde{C}_b^{(0)} \\ \tilde{C}_b^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \tilde{S}\chi_{2,b}^*, \quad \mathscr{C}_a = \begin{pmatrix} C_a^{(0)} \\ C_a^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} = (S^{-1})^\top \chi_{1,a}^*, \quad b = 1, \dots, p_2, \quad a = 1, \dots, p_1, \tag{4.57}$$

que llamaremos sucesiones, cadenas o escaleras de funciones de segunda especie.

Estos objetos son de hecho transformadas de Cauchy de las formas lineales $Q^{(l)}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, cuando las series involucradas en su definición convergen. Fijado un $z \in \mathbb{C}$, las entradas de cada sucesión $\mathscr{C}_a$ y $\tilde{\mathscr{C}}_b$ son series que no son necesariamente convergentes. En el caso no convergente es solo una definición formal.

Para cada $l \in \mathbb{Z}_+$ denotamos por $D_a^{(l)}$ y $\tilde{D}_b^{(l)}$ en $\mathbb{C}$ a los entornos más grandes de $z = \infty$ que no contienen a los respectivos soportes de las medidas de integración. Fuera de $D_a^{(l)}$ y $\tilde{D}_b^{(l)}$ las series son divergentes. Por lo tanto, para que $D_a^{(l)}$ y $\tilde{D}_b^{(l)}$ sean no triviales los correspondientes soportes $\operatorname{supp}(w_{2,a}d\mu)$ y $\operatorname{supp}(w_{2,b}d\mu)$ deben ser acotados.

Proposición 4.14. *Para cada $l \in \mathbb{Z}_+$ las funciones de segunda especie se pueden expresar como sigue*

$$\begin{aligned} \tilde{C}_b^{(l)}(z) &= \int \frac{Q^{(l)}(x) w_{2,b}(x)}{z - x} d\mu(x), \quad z \in \tilde{D}_b^{(l)}, \\ C_a^{(l)}(z) &= \int \frac{\tilde{Q}^{(l)}(x) w_{1,a}(x)}{z - x} d\mu(x), \quad z \in D_a^{(l)}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Demostración. La factorización de Gauss-Borel permite obtener las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \tilde{C}_b^{(l)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} S_{lk} g_{kn} (\Pi_{2,b} \chi_2^*(z))_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \sum_{k=0}^{l} S_{lk} x^{k_1(k)} w_{1,a_1(k)}(x) w_{2,b}(x) \frac{x^n}{z^{n+1}} d\mu(x) && \text{usando (4.13)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int x^n Q^{(l)}(x) w_{2,b}(x) d\mu(x). && \text{usando (4.37)} \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que la serie

$$\tilde{C}_b^{(l)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int x^n Q^{(l)}(x) w_{2,b}(x) d\mu(x)$$

converge absoluta y uniformemente para cualquier compacto dentro de su radio de convergencia, podemos intercambiar la integral por la suma y deducir la primera igualdad. La segunda igualdad se puede probar de forma análoga. □

Vamos a definir unos números enteros auxiliares, que aunque serán usados mucho con posterioridad interesa definirlos aquí. Son útiles en este contexto para la obtención de fórmulas para estas series (en principio formales) asociadas a transformadas de Cauchy que emplean determinantes. Posteriormente las utilizaremos para obtener su caracterización como funciones τ de la jerarquía integrable de Toda.

Definición 4.15. Dados $l \geq 1$ y $a = 1, \cdots, p$ definimos el entero asociado $+$ respecto a la componente a y que designaremos l_{+a}, como el entero más pequeño tal que $l_{+a} \geq l$ y que verifique que $a(l_{+a}) = a$. Análogamente llamaremos entero asociado $-$ respecto a la componente a y que escribimos como l_{-a}, al entero más grande tal que $l_{-a} \leq l$ y que además verifique $a(l_{-a}) = a$.

Es decir, l_{+a} y l_{-a} son los enteros que "pertenecen a la componente a" más próximos a l por exceso y por defecto. Se puede comprobar que vienen dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} l_{-a} &= \begin{cases} q(l)|\vec{n}| + \sum_{i=1}^{a} n_i - 1, & a < a(l), \\ l, & a = a(l), \\ q(l)|\vec{n}| - \sum_{i=a+2}^{p} n_i - 1, & a > a(l), \end{cases} \\ l_{+a} &= \begin{cases} (q(l)+1)|\vec{n}| + \sum_{i=1}^{a-1} n_i, & a < a(l), \\ l, & a = a(l), \\ (q(l)+1)|\vec{n}| - \sum_{i=a+1}^{p} n_i, & a > a(l). \end{cases} \end{aligned} \tag{4.59}$$

Definición 4.16. Definimos las siguientes series

$$\Gamma_{k,a}^{(l)} := \sum_{k'=l_{+a}}^{\infty} g_{k',k} z^{-k_1(k')-1} \delta_{a_1(k'),a}, \quad \tilde{\Gamma}_{k,b}^{(l)} := \sum_{k'=\tilde{l}_{+b}}^{\infty} g_{k,k'} z^{-k_2(k')-1} \delta_{a_2(k'),b}. \tag{4.60}$$

Aquí l_{+a} es el entero de tipo $+$ asociado a la composición $\vec{n}_1$, mientras que $\bar{l}_{+b}$ es el entero de tipo $+$ asociado a la composición $\vec{n}_2$.

Proposición 4.17. *Las siguientes expresiones caracterizan a las transformadas de Cauchy como* *determinantes formales*

$$\tilde{C}_b^{(l)} = \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \tilde{\Gamma}_{0,b}^{(l)} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \tilde{\Gamma}_{1,b}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & \tilde{\Gamma}_{l-1,b}^{(l)} \\ \hline g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} & \tilde{\Gamma}_{l,b}^{(l)}, \end{array}\right), \qquad l \geq 1, \tag{4.61}$$

$$C_a^{(l)} = \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,l} \\ \hline \Gamma_{0,a}^{(l)} & \Gamma_{1,a}^{(l)} & \cdots & \Gamma_{l-1,a}^{(l)} & \Gamma_{l,a}^{(l)} \end{array}\right), \qquad l \geq 1. \tag{4.62}$$

Demostración. Tenemos que

$$\tilde{C}_b^{(l)} = \frac{1}{\det g^{[l]}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} M_{k,l}^{(l+1)} \sum_{k_2=\nu_{2,b}(l-1)}^{\infty} z^{-k_2-1} \int x^{k_1(k)} w_{1,a_1(k)}(x) w_{2,b}(x) x^{k_2} d\mu(x),$$

que según (4.19) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \tilde{C}_b^{(l)} &= \frac{1}{\det g^{[l]}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} M_{k,l}^{(l+1)} \tilde{\Gamma}_{k,b}^{(l)}, \\ &= \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \tilde{\Gamma}_{0,b}^{(l)} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \tilde{\Gamma}_{0,b}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & \tilde{\Gamma}_{l-1,b}^{(l)} \\ \hline g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} & \tilde{\Gamma}_{l,b}^{(l)}, \end{array}\right), \qquad l \geq 1. \end{aligned}$$

Para las otras transformaciones obtenemos

$$C_a^{(l)} = \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l+k} M_{l,k}^{(l+1)} \sum_{k_1=\nu_{1,a}(l-1)}^{\infty} z^{-k_1-1} \int x^{k_1} w_{1,a}(x) w_{2,a_2(k)} x^{k_2(k)} d\mu(x),$$

que se puede escribir como (4.19)

$$\begin{aligned} C_a^{(l)} &= \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} M_{l,k}^{(l+1)} \Gamma_k^{(l)}, \\ &= \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,l} \\ \hline \Gamma_{0,a}^{(l)} & \Gamma_{1,a}^{(l)} & \cdots & \Gamma_{l-1,a}^{(l)} & \Gamma_{l,a}^{(l)} \end{array}\right), \qquad l \geq 1. \qquad \square \end{aligned}$$

Siguiendo a [52] consideramos también las funciones y polinomios de Markov-Stieltjes de segunda especie.

Definición 4.18. Las funciones de Markov-Stieltjes están definidas por

$$\hat{\mu}_{a,b}(z) := \int \frac{w_{1,a}(x)w_{2,b}(x)}{z-x} d\mu(x), \tag{4.63}$$

en términos de las cuales definimos también

$$\begin{aligned} \tilde{H}_b^{(l)}(z) &:= \sum_{a=1}^{p_1} A_a^{(l)}(z)\hat{\mu}_{a,b}(z) - \tilde{C}_b^{(l)}(z), \\ H_a^{(l)}(z) &:= \sum_{b=1}^{p_2} \hat{\mu}_{a,b}(z)\tilde{A}_b^{(l)}(z) - C_a^{(l)}(z). \end{aligned} \tag{4.64}$$

Proposición 4.19. *Las funciones $\tilde{H}_b^{(l)}$ y $H_a^{(l)}$ son polinomios en z.*

Demostración. Se puede ver con facilidad que $\tilde{H}_b^{(l)}$ y $H_a^{(l)}$ se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \tilde{H}_b^{(l)}(z) &= \int \sum_{a=1}^{p_1} w_{1,a}(x) \frac{A_a^{(l)}(z) - A_a^{(l)}(x)}{z-x} w_{2,b}(x) d\mu(x), \\ H_a^{(l)}(z) &= \int \sum_{b=1}^{p_2} w_{1,a}(x) \frac{\tilde{A}_b^{(l)}(z) - \tilde{A}_b^{(l)}(x)}{z-x} w_{2,b}(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

y como $z = x$ es un cero de los polinomios $A_a^{(l)}(z) - A_a^{(l)}(x)$ y $\tilde{A}_b^{(l)}(z) - \tilde{A}_b^{(l)}(x)$ de las fórmulas de arriba concluimos que de hecho son polinomios en z. □

De (4.56) y (4.57) podemos calcular el valor de las siguientes series construidas en términos de polinomios múltiplemente ortogonales y sus correspondientes funciones de segunda especie.

Proposición 4.20. *Se satisfacen las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} C_a^{(l)}(z) A_{a'}^{(l)}(z') &= \frac{\delta_{a,a'}}{z-z'}, & |z'| < |z|, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{C}_b^{(l)}(z) \tilde{A}_{b'}^{(l)}(z') &= \frac{\delta_{b,b'}}{z-z'}, & |z'| < |z|, \\ \sum_{l=0}^{\infty} C_a^{(l)}(z) \tilde{C}_b^{(l)}(z') &= -\frac{\hat{\mu}_{a,b}(z) - \hat{\mu}_{a,b}(z')}{z-z'}, & |z|, |z'| > R_{a,b}, \end{aligned} \tag{4.65}$$

donde $R_{a,b}$ es el radio de un disco centrado en el origen que contiene a $\operatorname{supp}(w_{1,a}w_{a,b}d\mu)$.

Demostración. De (4.56) y (4.57) deducimos que

$$\begin{aligned} (\mathscr{C}_a(z))^\top \mathscr{A}_{a'}(z') &= (\chi_{1,a}^*(z))^\top \chi_{1,a'}(z') = \frac{\delta_{a,a'}}{z-z'}, & |z'| < |z|, \\ (\tilde{\mathscr{C}}_b(z))^\top \tilde{\mathscr{A}}_{a'}(z') &= (\chi_{2,b}^*(z))^\top \chi_{2,b'}(z') = \frac{\delta_{b,b'}}{z-z'}, & |z'| < |z|, \\ (\mathscr{C}_a(z))^\top \tilde{\mathscr{C}}_b(z') &= (\chi_{1,a}^*(z))^\top g \chi_{2,b}^*(z'). \end{aligned}$$

Las dos primeras relaciones implican a las dos primeras ecuaciones correspondientes en la proposición. Para la tercera observamos que de (4.11) obtenemos

$$\begin{aligned}(\chi^*_{1,a}(z))^\top g\chi^*_{2,b'}(z') &= \int (\chi^*_{1,a}(z))^\top \xi_1(x)(\xi_2(x))^\top \chi^*_{2,b'}(z')d\mu(x)\\ &= \int (\chi^*_{1,a}(z))^\top \chi_{1,a}(x)(\chi_{2,b}(x))^\top \chi^*_{2,b'}(z')w_{1,a}(x)w_{2,b}(x)d\mu(x)\\ &= \int \frac{1}{(z-x)(z'-x)}w_{1,a}(x)w_{2,b}(x)d\mu(x)\\ &= -\frac{1}{z-z'}\int \Big(\frac{1}{z-x}-\frac{1}{z'-x}\Big)w_{1,a}(x)w_{2,b}(x)d\mu(x). \qquad \square\end{aligned}$$

4.1.5. Relaciones de recurrencia

La matriz de momentos definida tiene una simetría de tipo Hankel que tiene como consecuencia, tanto la existencia de fórmulas de recurrencia como la existencia de fórmulas de tipo Christoffel-Darboux. En este apartado vamos a considerar las primeras.

Consideremos los siguientes operadores de traslación "por componentes"

$$\Lambda_a := \sum_{k=0}^{\infty} e_a(k)e_a(k+1)^\top. \tag{4.66}$$

de su definición se sigue fácilmente que

- Λ_a deja invariante los subespacios $\Pi_{a'}\mathbb{R}^\infty$, para $a'=1,\dots,p$, y $\Pi_{a'}\Lambda_a=\Lambda_a\Pi_{a'}$.
- El conjunto de matrices semi-infinitas $\{\Lambda_a^j\}_{\substack{a=1,\dots,p\\ j=1,2,\dots}}$ es conmutativo.
- Se verifica la propiedad de autovalor

$$\Lambda_a\chi_{a'}=\delta_{a,a'}z\chi_a. \tag{4.67}$$

Definición 4.21. Definimos las matrices múltiples de desplazamiento como sigue

$$\Upsilon_1 := \sum_{a=1}^{p_1}\Lambda_{1,a}, \qquad\qquad \Upsilon_2 := \sum_{b=1}^{p_2}\Lambda_{2,b}, \tag{4.68}$$

e introducimos los enteros

$$\begin{aligned} N_{1,a} &:= |\vec n_1| - n_{1,a}+1 = \sum_{\substack{a'=1,\dots,p_1\\ a'\neq a}} n_{1,a'}+1, && a=1,\dots,p_1, && N_1 := \max_{a=1,\dots,p_1} N_{1,a},\\ N_{2,b} &:= |\vec n_2| - n_{2,b}+1 = \sum_{\substack{b'=1,\dots,p_2\\ b'\neq b}} n_{2,b'}+1, && b=1,\dots,p_2, && N_2 := \max_{b=1,\dots,p_2} N_{2,b}.\end{aligned}$$

El cálculo directo a partir de la definición da lugar al siguiente resultado

Proposición 4.22. *Las matrices Υ_1 y Υ_2 tienen la siguiente estructura*

$$\Upsilon_1 = D_{1,0}\Lambda + D_{1,1}\Lambda^{N_{1,1}}+\dots+D_{1,p_1}\Lambda^{N_{1,p_1}}, \quad \Upsilon_2 = D_{2,0}\Lambda + D_{2,1}\Lambda^{N_{2,1}}+\dots+D_{2,p_2}\Lambda^{N_{2,p_2}}.$$

donde $D_{1,a}$, $a=1,\dots,p_1$, y $D_{2,b}$, $b=1,\dots,p_2$, son las siguientes matrices diagonales semi-infinitas:

$$D_{1,a}=\operatorname{diag}(D_{1,a}(0),D_{1,a}(1),\dots),\quad D_{1,a}(n):=\begin{cases}1, & n=k|\vec{n}_1|+\sum_{a'=1}^{a}n_{1,a'}-1, \quad k\in\mathbb{Z}_+,\\ 0, & n\neq k|\vec{n}_1|+\sum_{a'=1}^{a}n_{1,a'}-1, \quad k\in\mathbb{Z}_+,\end{cases}$$

$$D_{2,b}=\operatorname{diag}(D_{2,b}(0),D_{2,b}(1),\dots),\quad D_{2,b}(n):=\begin{cases}1, & n=k|\vec{n}_2|+\sum_{b'=1}^{b}n_{2,b'}-1, \quad k\in\mathbb{Z}_+,\\ 0, & n\neq k|\vec{n}_2|+\sum_{b'=1}^{b}n_{2,b'}-1, \quad k\in\mathbb{Z}_+,\end{cases}$$

$$D_{1,0}:=\mathbb{I}-\sum_{a=1}^{p_1}D_{1,a},\qquad D_{2,0}:=\mathbb{I}-\sum_{b=1}^{p_2}D_{2,b}.$$

En términos de las matrices de traslación podemos describir la simetría Hankel particular de esta matriz de momentos

Proposición 4.23. *La matriz de momentos g satisface la condición de simetría tipo Hankel*

$$\Upsilon_1 g=g\Upsilon_2^\top. \tag{4.69}$$

Demostración. Usando (4.18) y (4.13) obtenemos la simetría por componentes

$$\Lambda_{1,a}g\Pi_{2,b}=\Pi_{1,a}g\Lambda_{2,b}^\top, \tag{4.70}$$

donde sumando en $a=1,\dots,p_1$ y $b=1,\dots,p_2$ obtenemos el resultado deseado. □

En sintonía con lo que comentamos anteriormente, de (4.69) se puede deducir una cuestión importante. A pesar de que todas las matrices de momentos truncadas $g^{[l]}$, $l=1,2,\dots$ son invertibles, la matriz de momentos $g=\lim_{l\to\infty}g^{[l]}$ no es invertible. Supongamos que existe la inversa $g^{-1}=(\tilde{g}_{i,j})_{i,j=0,1,\dots}$ de g. En ese caso (4.69) implica $g^{-1}\Upsilon_1=\Upsilon_2^\top g^{-1}$, y por lo tanto $\tilde{g}_{i,0}=\tilde{g}_{0,j}=0$ para todo $i,j=0,1,\dots$, lo que es contradictorio con la invertibilidad de g.

Proposición 4.24. *De la simetría de la matriz de momentos se puede obtener*

$$S\Upsilon_1S^{-1}=\tilde{S}\Upsilon_2^\top\tilde{S}^{-1}. \tag{4.71}$$

Demostración. Si introducimos (4.24) en (4.69) obtenemos

$$\Upsilon_1S^{-1}\tilde{S}=S^{-1}\tilde{S}\Upsilon_2^\top\Rightarrow S\Upsilon_1S^{-1}=\tilde{S}\Upsilon_2^\top\tilde{S}^{-1}\square$$

Definición 4.25. Definimos las matrices

$$J:=J_++J_-,\qquad J_+:=(S\Upsilon_1S^{-1})_+,\qquad J_-:=(\tilde{S}\Upsilon_2^\top\tilde{S}^{-1})_-. \tag{4.72}$$

Por lo tanto, J_+ es una matriz triangular superior y J_- una matriz triangular inferior estricta. Además, de la *string equation* (4.71) tenemos las expresiones alternativas para J

$$J=S\Upsilon_1S^{-1}=\tilde{S}\Upsilon_2^\top\tilde{S}^{-1}. \tag{4.73}$$

Ahora analizamos la estructura de $J_+:=(SD_{1,0}\Lambda S^{-1})_++(SD_{1,1}\Lambda^{N_{1,1}}S^{-1})_++\cdots+(SD_{1,p_1}\Lambda^{N_{1,p_1}}S^{-1})_+$. Está claro que necesitamos evaluar expresiones de la forma $SE_{i,j}S^{-1}$ con $i=\kappa_1(k,a)-1$ y

$j = \kappa_1(k+1, a-1)$ siendo $\kappa_1(k,a) := k|\vec{n}_1| + \sum_{a'=1}^{a} n_{1,a'}$. Dada la forma de S, (ver (4.24)), tenemos que

$$(SE_{i,j}S^{-1})_+ = E_{i,j} + \sum_{l,l \in \mathbb{L}_{i,j}} s_{l,l'}E_{l,l'}, \qquad \mathbb{L}_{i,j} := \{(l,l') \in \mathbb{Z}_+^2 | l < i, l' < j, l' \geq l\},$$

para ciertos números $s_{l,l'} \in \mathbb{R}$ que dependen de los coeficientes de S y de i,j. Esta matriz es nula salvo en una región que puede representarse como un triángulo rectángulo con la hipotenusa en la diagonal principal y cuyo vértice opuesto está precisamente en la posición (i,j). Por lo tanto

$$J_+ = (SD_{1,0}\Lambda S^{-1})_+ + \sum_{a=1}^{p_1}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(E_{\kappa_1(k,a)-1,\kappa_1(k+1,a-1)} + \sum_{l,l' \in \mathbb{L}_{1,k,a}} s_{l,l'}E_{l,l'}\Bigg),$$
$$\mathbb{L}_{1,k,a} := \mathbb{L}_{\kappa_1(k,a)-1,\kappa_1(k+1,a-1)}.$$

Vemos que J_+ se puede representar esquemáticamente como una escalera, la escalera definida por $\vec{n}_1$. Esta escalera desciende sobre la diagonal principal con pasos que están construidos con triángulos rectángulos con la hipotenusa en la diagonal principal y el vértice opuesto (y por lo tanto el ángulo del escalón) en la posición $(\kappa_1(k,a)-1, \kappa_1(k+1,a-1))$ de la matriz. La altura y anchura están asociadas a los enteros en la composición $\vec{n}_1$. Por ejemplo, el j-ésimo escalón tiene anchura $n_{1,\frac{j}{p_1}-[\frac{j}{p_1}]}$ y altura $n_{1,\frac{j+1}{p_1}-[\frac{j+1}{p_1}]}$. Se puede hacer una descripción similar para $J_-^\top$ pero reemplazando la composición $\vec{n}_1$ por la $\vec{n}_2$.

La matriz J es entonces una matriz de Jacobi generalizada y con una estructura multi-diagonal (en general con más de tres diagonales). En concreto tiene $N_1 + N_2 + 1$ diagonales que no se anulan, sin embargo, muchos de los elementos situados en estas diagonales son también cero. La forma de J está determinada por la escalera $\vec{n}_1$ en la parte superior y la escalera $\vec{n}_2$ en la parte inferior. Nos referiremos a ella como una forma de doble escalera $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ o forma de "serpiente". Para ilustrar esto vamos a escribir la matriz truncada con $l = 27$ para el caso $\vec{n}_1 = (4,3,2)$ y $\vec{n}_2 = (3,2)$.

$$J^{[27]} = \left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
* & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & *
\end{array}\right), \tag{4.74}$$

donde $*$ indica un elemento que puede ser distinto de cero. Para poner de manifiesto la estructura de bandas escribimos

$$J = J_{N_1}\Lambda^{N_1} + \cdots + J_1\Lambda + J_0 + J_{-1}\Lambda^\top + \cdots + J_{-N_2}(\Lambda^\top)^{N_2}, \tag{4.75}$$

donde $J_i = \operatorname{diag}(J_i(0), J_i(1), \dots)$. Por conveniencia extendemos la notación con $J_r(s) = 0$ aun cuando $r + s < 0$ o $s < 0$.

Pasamos ahora a estudiar las relaciones de recurrencia a partir de la matriz de Jacobi.

Definición 4.26. Los vectores semi-infinitos c_a y $\tilde{c}_b$ vienen dados por

$$\begin{aligned} \tilde{c}_b &:= \tilde{S}e_{2,b}(0), & b &= 1, \dots, p_2, \\ c_a &:= (S^{-1})^\top e_{1,a}(0), & a &= 1, \dots, p_1. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Se puede ver que

$$\tilde{c}_b = \sum_{l=0}^{n_{2,1}+\cdots+n_{2,b}-1} \tilde{S}_{l,n_{2,1}+\cdots+n_{2,b}-1}e_l, \qquad c_a = \sum_{l=0}^{n_{1,1}+\cdots+n_{1,a}-1} (S^{-1})_{n_{1,1}+\cdots+n_{1,a}-1,l}e_l. \tag{4.77}$$

Con estos elementos enunciamos la siguiente propiedad de tipo espectral para las matrices J y $J^\top$

Proposición 4.27. *Se verifican las siguientes ecuaciones*

$$\begin{aligned} J\mathscr{A}_a(z) &= z\mathscr{A}_a(z), & J^\top\tilde{\mathscr{A}}_b(z) &= z\tilde{\mathscr{A}}_b(z), \\ J\tilde{\mathscr{C}}_b(z) &= z\tilde{\mathscr{C}}_b(z) - \tilde{c}_b, & J^\top\mathscr{C}_a(z) &= z\mathscr{C}_a(z) - c_a. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Demostración. De (4.56) y (4.57)

$$\begin{aligned} J\mathscr{A}_a(z) &= S\Upsilon_1 S^{-1}S\chi_{1,a}(z) = zS\chi_{1,a} = z\mathscr{A}_a(z), \\ J\tilde{\mathscr{C}}_b(z) &= \tilde{S}\Upsilon_2^\top\tilde{S}^{-1}\tilde{S}\chi_{2,b}^*(z) = \tilde{S}(z\chi_{2,b}^*(z) - e_b(0)) = z\tilde{\mathscr{C}}_b(z) - \tilde{c}_b, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\Upsilon_2^\top\chi_{2,b}^*(z) = z\chi_{2,b}^*(z) - e_b(0)$.

Para $J^\top$ procedemos de forma similar:

$$\begin{aligned} J^\top\tilde{\mathscr{A}}_b(z) &= (\tilde{S}^{-1})^\top\Upsilon_2\tilde{S}^\top(\tilde{S}^{-1})^\top\chi_{2,b}(z) = z(\tilde{S}^{-1})^\top\chi_{2,a} = z\tilde{\mathscr{A}}_b(z), \\ J^\top\mathscr{C}_a(z) &= (S^{-1})^\top\Upsilon_1^\top S^\top(S^{-1})^\top\chi_{1,a}^*(z) = (S^{-1})^\top(z\chi_{1,a}^*(z) - e_a(0)) = z\mathscr{C}_a(z) - c_a. \end{aligned} \qquad \square$$

Teorema 4.28. *Los polinomios múltiplemente ortogonales y sus funciones de segunda especie asociadas satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia*

$$\begin{aligned} zA_a^{(l)}(z) &= J_{-N_2}(l)A_a^{(l-N_2)}(z) + \cdots + J_{N_1}(l)A_a^{(l+N_1)}(z), \\ z\tilde{C}_b^{(l)}(z) - \tilde{c}_b^{(l)} &= J_{-N_2}(l)\tilde{C}_b^{(l-N_2)}(z) + \cdots + J_{N_1}(l)\tilde{C}_b^{(l+N_1)}(z), \end{aligned} \tag{4.79}$$

mientras que las relaciones duales son

$$\begin{aligned} z\tilde{A}_b^{(l)}(z) &= J_{-N_2}(l+N_2)\tilde{A}_b^{(l+N_2)}(z) + \cdots + J_{N_1}(l-N_1)\tilde{A}_b^{(l-N_1)}(z), \\ zC_a^{(l)}(z) - c_a &= J_{-N_2}(l+N_2)C_a^{(l+N_2)}(z) + \cdots + J_{N_1}(l-N_1)C_a^{(l-N_1)}(z). \end{aligned} \tag{4.80}$$

Vemos que dados dos multi-índices enteros $(\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)$ hay distintas relaciones de recurrencia asociadas con $A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}$. De hecho hay tantas como escaleras existentes que lleguen al conjunto de grados deseado. Para la escalera que hemos denominado más simple, es decir, aquella con $\vec{n}_1 = \vec{\nu}_1$ y $\vec{n}_2 = \vec{\nu}_2 + \vec{e}_{2,p_2}$, obtenemos la recurrencia más larga. Cuanto más pequeños sean los enteros de la composición más corta es la recurrencia, la más corta se alcanza cuando todos los multi-índices avanzan de uno en uno. También es importante recordar que los polinomios múltiplemente ortogonales que aparecen en la fórmula son distintos para cada una de las fórmulas de recurrencia.

Según el ejemplo visto en (4.74) obtenemos que las relaciones de recurrencia para $l = 8$ y $l = 14$ son de la forma

$$
\begin{aligned}
zA_a^{(8)}(z) &= *A_a^{(4)}(z) + \cdots + *A_a^{(15)}(z) + A_a^{(16)}(z), && a = 1,2,3,\\
zA_a^{(14)}(z) &= *A_a^{(12)}(z) + \cdots + *A_a^{(18)}(z), && a = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

vemos que la primera fórmula tiene 13 términos mientras que la segunda 7 términos. Para poder identificar estos polinomios con los de la forma $A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2,a]}$ mostramos la siguiente tabla de grados para las composiciones $\vec{n}_1 = (4,3,2)$ y $\vec{n}_2 = (3,2)$ que es la siguiente

l	4	5	6	7	8	9	10
$\vec{\nu}_1(l)$	(4,0,0)	(4,1,0)	(4,2,0)	(4,3,0)	(4,3,1)	(4,3,2)	(5,3,2)
$\vec{\nu}_2(l-1)$	(2,0)	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)

l	11	12	13	14	15	16	17	18
$\vec{\nu}_1(l)$	(6,3,2)	(7,3,2)	(8,3,2)	(8,4,2)	(8,5,2)	(8,6,2)	(8,6,3)	(8,6,4)
$\vec{\nu}_2(l-1)$	(6,3)	(6,4)	(7,4)	(8,4)	(9,4)	(9,5)	(9,6)	(10,6)

4.1.6. Fórmulas de Christoffel-Darboux

La otra consecuencia importante de la simetría Hankel de la matriz de momentos g es la posibilidad de construir fórmulas de Christoffel-Darboux o generalizaciones. Ese es el objetivo de esta sección.

Operadores de proyección y el núcleo de Christoffel-Darboux

Para introducir el núcleo de Christoffel-Darboux necesitamos primero las siguientes definiciones

Definición 4.29. Vamos a usar los siguientes espacios

$$
\mathcal{H}_1^{[l]} := \mathbb{R}\{\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_1^{(l-1)}\}, \qquad \mathcal{H}_2^{[l]} := \mathbb{R}\{\xi_2^{(0)}, \dots, \xi_2^{(l-1)}\}, \tag{4.81}
$$

y sus límites

$$
\mathcal{H}_1 := \Big\{ \sum_{0 \le l \ll \infty} c_l \xi_1^{(l)}, c_l \in \mathbb{R} \Big\}, \qquad \mathcal{H}_2 := \Big\{ \sum_{0 \le l \ll \infty} c_l \xi_2^{(l)}, c_l \in \mathbb{R} \Big\}. \tag{4.82}
$$

Las siguientes descomposiciones

$$
\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^{[l]} \oplus (\mathcal{H}_1^{[l]})^{\perp}, \qquad \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2^{[l]} \oplus (\mathcal{H}_2^{[l]})^{\perp}, \tag{4.83}
$$

inducen las proyecciones ortogonales

$$\pi_1^{(l)} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1^{[l]}, \qquad \pi_2^{(l)} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2^{[l]}. \tag{4.84}$$

Proposición 4.30. *Tenemos la siguientes caracterizaciones de los espacios lineales previamente estudiados*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{[l]} &= \mathbb{R}\{Q^{(0)}, \dots, Q^{(l-1)}\}, & \mathcal{H}_2^{[l]} &= \mathbb{R}\{\tilde{Q}^{(0)}, \dots, \tilde{Q}^{(l-1)}\}, \\ (\mathcal{H}_1^{[l]})^\perp &= \Big\{ \sum_{l \le j \ll \infty} c_j \tilde{Q}^{(j)}, c_j \in \mathbb{R} \Big\}, & (\mathcal{H}_2^{[l]})^\perp &= \Big\{ \sum_{l \le j \ll \infty} c_j Q^{(j)}, c_j \in \mathbb{R} \Big\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \Big\{ \sum_{0 \le l \ll \infty} c_l Q^{(l)}, c_l \in \mathbb{R} \Big\}, & \mathcal{H}_2 &= \Big\{ \sum_{0 \le l \ll \infty} c_l \tilde{Q}^{(l)}, c_l \in \mathbb{R} \Big\}. \end{aligned} \tag{4.85}$$

Definición 4.31. El núcleo de Christoffel-Darboux se puede definir como

$$K^{[l]}(x, y) := \sum_{k=0}^{l-1} Q^{(k)}(y) \tilde{Q}^{(k)}(x). \tag{4.86}$$

Este es el núcleo de la representación integral de las proyecciones introducidas en la definición 4.29.

Proposición 4.32. *Se verifica la siguiente representación integral*

$$\begin{aligned} (\pi_1^{(l)} f)(y) &= \int K^{[l]}(x, y) f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in \mathcal{H}_1, \\ (\pi_2^{(l)} f)(y) &= \int K^{[l]}(y, x) f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in \mathcal{H}_2. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Demostración. Se sigue de la condición de bi-ortogonalidad (4.39). □

El núcleo de Christoffel-Darboux se llama también *reproducing kernel* y tiene por lo tanto la siguiente propiedad reproductiva

Proposición 4.33. *El núcleo $K^{[l]}(x, y)$ satisface*

$$K^{[l]}(x, y) = \int K^{[l]}(x, v) K^{[l]}(v, y) d\mu(v). \tag{4.88}$$

El teorema ABC

Vamos a partir de un teorema tipo ABC (Aitken-Berg-Collar, tomando la notación de [110]) para el núcleo de Christoffel-Darboux.

Definición 4.34. Los núcleos parciales de Christoffel-Darboux se pueden definir como sigue

$$K_{b,a}^{[l]}(x, y) := \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{A}_b^{(k)}(x) A_a^{(k)}(y). \tag{4.89}$$

Como es lógico, podemos establecer la siguiente relación entre los núcleos parciales

$$K^{[l]}(x, y) = \sum_{\substack{a=1,\dots,p_1 \\ b=1,\dots,p_2}} K_{b,a}^{[l]}(x, y) w_{1,a}(y) w_{2,b}(x). \tag{4.90}$$

Recordando la notación particionada introducida en al capítulo 3 podemos deducir el siguiente caso particular del teorema ABC,

Teorema 4.35. *El núcleos parciales de Christoffel-Darboux se pueden obtener a partir de la inversa de la matriz de momentos mediante la siguiente expresión*

$$K^{[l]}_{b,a}(x,y)=(\chi^{[l]}_{2,b}(x))^\top(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}_{1,a}(y). \tag{4.91}$$

Demostración. Esto es una consecuencia de las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
K^{[l]}_{b,a}(x,y)&=(\Pi^{[l]}\tilde{\mathscr{A}}_b(x))^\top(\Pi^{[l]}\mathscr{A}_a(y)) && \text{la suma es sobre los primeros } l \text{ componentes}\\
&=\chi^\top_{2,b}(x)\tilde S^{-1}\Pi^{[l]}S\chi_{1,a}(y) && \text{ver (4.36)}\\
&=\chi^\top_{2,b}(x)(\Pi^{[l]}\tilde S^{-1}\Pi^{[l]})(\Pi^{[l]}S\Pi^{[l]})\chi_{1,a}(y) && \text{forma triangular superior e inferior de } S \text{ y } \tilde S\\
&=(\chi^{[l]}_{2,b}(x))^\top(\tilde S^{[l]})^{-1}S^{[l]}\chi^{[l]}_{1,a}(y)\\
&=(\chi^{[l]}_{2,b}(x))^\top(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}_{1,a}(y) && \text{factorización LU (4.24).}
\end{aligned}$$

□

De él obtenemos

Corolario 4.36. *El núcleo de Christoffel-Darboux tiene la siguiente expresión en función de la inversa de la matriz truncada de momentos*

$$K^{[l]}(x,y)=(\xi^{[l]}_2(x))^\top(g^{[l]})^{-1}\xi^{[l]}_1(y). \tag{4.92}$$

La fórmula de Christoffel-Darboux

En este apartado deducimos una fórmula de Christoffel-Darboux de la propiedad de simetría (4.69) de la matriz de momentos g.

Lema 4.37. *Se cumplen las siguientes relaciones*

$$(g^{[l]})^{-1}\Upsilon^{[l]}_1-(\Upsilon^{[l]}_2)^\top(g^{[l]})^{-1}=(g^{[l]})^{-1}\Big(g^{[l,\geq l]}(\Upsilon^{[l,\geq l]}_2)^\top-\Upsilon^{[l,\geq l]}_1g^{[\geq l,l]}\Big)(g^{[l]})^{-1}. \tag{4.93}$$

Demostración. El primer bloque de (4.69) es

$$\Upsilon^{[l]}_1g^{[l]}+\Upsilon^{[l,\geq l]}_1g^{[\geq l,l]}=g^{[l]}(\Upsilon^{[l]}_2)^\top+g^{[l,\geq l]}(\Upsilon^{[l,\geq l]}_2)^\top,$$

de donde el resultado se deduce inmediatamente. □

Lema 4.38. *Tenemos también que*

$$\Upsilon^{[l]}_\ell\xi^{[l]}_\ell(x)=x\xi^{[l]}_\ell(x)-\Upsilon^{[l,\geq l]}_\ell\xi^{[\geq l]}_\ell(x), \qquad \ell=1,2. \tag{4.94}$$

Demostración. Se sigue de la descomposición por bloques y de la propiedad de autovalor de Υ_ℓ. □

Después de calcular directamente a partir de la definición 4.21 obtenemos el último lema necesario.

Lema 4.39. *Si suponemos que $l\geq \max(|\vec n_1|,|\vec n_2|)$ tenemos las siguientes expresiones para los bloques de Υ_1 y Υ_2.*

$$\Upsilon^{[l,\geq l]}_1=\sum_{a=1}^{p_1}e_{(l-1)_{-a}}e^\top_{l_{+a}-l}, \qquad \Upsilon^{[l,\geq l]}_2=\sum_{b=1}^{p_2}e_{\overline{(l-1)}_{-b}}e^\top_{\bar l_{+b}-l}. \tag{4.95}$$

Aquí $l_{\pm a}$ es el entero de tipo $\pm$ asociado a la composición $\vec n_1$, mientras que $\bar l_{\pm b}$ es el entero de tipo $\pm$ asociado a la composición $\vec n_2$.

Finalmente, para obtener una fórmula de Christoffel-Darboux necesitamos los siguientes objetos

Definición 4.40. Los siguientes polinomios, a los que llamamos "polinomios asociados" están definidos por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
A^{(l)}_{+a,a'}(y) &:= \chi^{(l_{+a})}_{1,a'}(y) - \begin{pmatrix} g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1}\end{pmatrix} (g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}_{1,a'}(y),\\
\tilde{A}^{(l)}_{-a,b'}(x) &:= (\chi^{[l+1]}_{2,b'}(x))^\top (g^{[l+1]})^{-1} e_{l_{-a}},\\
A^{(l)}_{-b,a'}(y) &:= e^\top_{\bar{l}_{-b}}(g^{[l+1]})^{-1}\chi^{[l+1]}_{1,a'}(y),\\
\tilde{A}^{(l)}_{+b,b'}(x) &:= \left(\chi^{(\bar{l}_{+b})}_{2,b'}(x) - (\chi^{[l]}_{2,b'}(x))^\top (g^{[l]})^{-1}\begin{pmatrix} g_{0,\bar{l}_{+b}}\\ g_{1,\bar{l}_{+b}}\\ \vdots \\ g_{l-1,\bar{l}_{+b}}\end{pmatrix}\right),
\end{aligned} \tag{4.96}$$

y las formas lineales asociadas a ellos están dadas por

$$\begin{aligned}
Q^{(l)}_{+a} &:= \sum_{a'=1}^{p_1} A^{(l)}_{+a,a'} w_{1,a'}, & \tilde{Q}^{(l)}_{-a} &:= \sum_{b'=1}^{p_2} \tilde{A}^{(l)}_{-a,b'} w_{2,b'}, & a&=1,\dots,p_1,\\
Q^{(l)}_{-b} &:= \sum_{a'=1}^{p_1} A^{(l)}_{-b,a'} w_{1,a'}, & \tilde{Q}^{(l)}_{+b} &:= \sum_{b'=1}^{p_2} \tilde{A}^{(l)}_{+b,b'} w_{2,b'}, & b&=1,\dots,p_2.
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Enunciamos ahora el resultado principal de la sección

Teorema 4.41. *Cuando* $l \geq \text{máx}(|\vec{n}_1|, |\vec{n}_2|)$ *se verifican las siguientes fórmulas de Christoffel-Darboux*

$$\begin{aligned}
(x-y)K^{[l]}_{a',b'}(x,y) &= \sum_{b=1}^{p_2} \tilde{A}^{(l)}_{+b,b'}(x) A^{(l-1)}_{-b,a'}(y) - \sum_{a=1}^{p_1} \tilde{A}^{(l-1)}_{-a,b'}(x) A^{(l)}_{+a,a'}(y),\\
(x-y)K^{[l]}(x,y) &= \sum_{b=1}^{p_2} \tilde{Q}^{(l)}_{+b}(x) Q^{(l-1)}_{-b}(y) - \sum_{a=1}^{p_1} \tilde{Q}^{(l-1)}_{-a}(x) Q^{(l)}_{+a}(y).
\end{aligned}$$

Demostración. A partir del lema 4.37 deducimos

$$\begin{aligned}
&(\chi^{[l]}_{2,b'}(x))^\top((g^{[l]})^{-1}\Upsilon^{[l]}_1 - (\Upsilon^{[l]}_2)^\top (g^{[l]})^{-1})\chi^{[l]}_{1,a'}(y) =\\
&\qquad = (\chi^{[l]}_{2,b'}(x))^\top (g^{[l]})^{-1}\big(g^{[l,\geq l]}(\Upsilon^{[l,\geq l]}_2)^\top - \Upsilon^{[l,\geq l]}_1 g^{[\geq l,l]}\big)(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}_{1,a'}(y),
\end{aligned}$$

de forma que, a partir del teorema 4.35 obtenemos

$$\begin{aligned}
(y-x)K^{[l]}_{b',a'}(x,y) =&(\chi^{[l]}_{2,b'}(x))^\top (g^{[l]})^{-1}\big(g^{[l,\geq l]}(\Upsilon^{[l,\geq l]}_2)^\top - \Upsilon^{[l,\geq l]}_1 g^{[\geq l,l]}\big)(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}_{1,a'}(y)\\
&+ (\chi^{[l]}_{2,b'}(x))^\top (g^{[l]})^{-1}\Upsilon^{[l,\geq l]}_1 \chi^{[\geq l]}_{1,a'}(y) - (\Upsilon^{[l,\geq l]}_2 \chi^{[\geq l]}_{2,b'}(x))^\top (g^{[l]})^{-1}(\chi^{[l]}_{1,a'}(y)),
\end{aligned}$$

o lo que es equivalente

$$\begin{aligned}
(x-y)K^{[l]}_{b',a'}(x,y) =&\Big((\chi^{[\geq l]}_{2,b'}(x))^\top - (\chi^{[l]}_{2,b'}(x))^\top (g^{[l]})^{-1} g^{[l,\geq l]}\Big)(\Upsilon^{[l,\geq l]}_2)^\top (g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}_{1,a'}(y)\\
&- (\chi^{[l]}_{2,b'}(x))^\top (g^{[l]})^{-1}\Upsilon^{[l,\geq l]}_1\Big(\chi^{[\geq l]}_{1,a'}(y) - g^{[\geq l,l]}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}_{1,a'}(y)\Big).
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir del lema 4.39 concluimos las siguientes expresiones

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_1^{[l,\geq l]}\chi_{1,a'}^{[\geq l]}(y) &= \sum_{a=1}^{p_1} e_{(l-1)_{-a}}\chi_{1,a'}^{(l_{+a})}(y),\\
\Upsilon_1^{[l,\geq l]}g^{[\geq l,l]} &= \sum_{a=1}^{p_1} e_{(l-1)_{-a}}\begin{pmatrix} g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1}\end{pmatrix},\\
(\chi_{2,b'}^{[\geq l]}(x))^\top(\Upsilon_2^{[l,\geq l]})^\top &= \sum_{b=1}^{p_2}\chi_{2,b'}^{(\bar{l}_{+b})}(x)e^\top_{\overline{(l-1)}_{-b}},\\
g^{[l,\geq l]}(\Upsilon_2^{[l,\geq l]})^\top &= \sum_{b=1}^{p_2}\begin{pmatrix} g_{0,\bar{l}_{+b}}\\ g_{1,\bar{l}_{+b}}\\ \vdots \\ g_{l-1,\bar{l}_{+b}}\end{pmatrix} e^\top_{\overline{(l-1)}_{-b}},
\end{aligned}
$$

y consecuentemente

$$
\begin{aligned}
(x-y)K_{b',a'}^{[l]}(x,y) =& \sum_{b=1}^{p_2}\left(\chi_{2,b'}^{(\bar{l}_{+b})}(x) - (\chi_{2,b'}^{[l]}(x))^\top (g^{[l]})^{-1}\begin{pmatrix} g_{0,\bar{l}_{+b}}\\ g_{1,\bar{l}_{+b}}\\ \vdots \\ g_{l-1,\bar{l}_{+b}}\end{pmatrix}\right)e^\top_{\overline{(l-1)}_{-b}}(g^{[l]})^{-1}\chi_{1,a'}^{[l]}(y)\\
&-\sum_{a=1}^{p_1}(\chi_{2,b'}^{[l]}(x))^\top(g^{[l]})^{-1}e_{(l-1)_{-a}}\big(\chi_{1,a'}^{(l_{+a})}(y) - \begin{pmatrix} g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1}\end{pmatrix}(g^{[l]})^{-1}\chi_{1,a'}^{[l]}(y)\big),
\end{aligned}
$$

donde usando los objetos de la definición 4.40 obtenemos el resultado deseado.

□

Las formas lineales de los polinomios asociados de la definición 4.40 son formas lineales de determinados polinomios múltiplemente ortogonales tal y como enunciamos a continuación

Proposición 4.42. *Tenemos las fórmulas*

$$
\begin{aligned}
Q_{+a}^{(l)} &= Q^{(\mathrm{II},a)}_{[\vec{\nu}_1(l-1)+\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2(l-1)]}, & Q_{-b}^{(l)} &= Q^{(\mathrm{I},b)}_{[\vec{\nu}_1(l);\vec{\nu}_2(l)-\vec{e}_{2,b}]},\\
\tilde{Q}_{+b}^{(l)} &= \tilde{Q}^{(\mathrm{II},b)}_{[\vec{\nu}_2(l-1)+\vec{e}_{2,b};\vec{\nu}_1(l-1)]}, & \tilde{Q}_{-a}^{(l)} &= Q^{(\mathrm{I},a)}_{[\vec{\nu}_2(l);\vec{\nu}_1(l)-\vec{e}_{1,a}]}.
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

Demostración. Usando la definición 4.40 para las formas lineales $Q_{+a}^{(l)}$ y multiplicando por $(\xi_2^{[l]}(x))^\top$ tenemos que

$$
Q_{+a}^{(l)}(x)(\xi_2^{[l]}(x))^\top = \xi_1^{(l_{+a})}(x)(\xi_2^{[l]}(x))^\top - \begin{pmatrix} g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1}\end{pmatrix}(g^{[l]})^{-1}\xi_1^{[l]}(x)(\xi_2^{[l]}(x))^\top,
$$

si integramos ambos miembros de la ecuación, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int Q_{+a}^{(l)}(x)(\xi_2^{[l]}(x))^\top d\mu(x) &= \int \xi_1^{(l_{+a})}(x)(\xi_2^{[l]}(x))^\top d\mu(x)\\
&\quad - \begin{pmatrix} g_{l_{+a},0} & \cdots & g_{l_{+a},l-1}\end{pmatrix}(g^{[l]})^{-1}\int \xi_1^{[l]}(x)(\xi_2^{[l]}(x))^\top d\mu(x)\\
&= \int \xi_1^{(l_{+a})}(x)(\xi_2^{[l]}(x))^\top d\mu(x) - \begin{pmatrix} g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1}\end{pmatrix}(g^{[l]})^{-1}g^{[l]}\\
&= \begin{pmatrix} g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1}\end{pmatrix}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

Los componentes de esta ecuación matricial dan lugar a las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\int_{\mathbb{R}} Q^{(l)}_{+a}(x)w_{2,a_2(k)}(x)x^{k_2(k)}d\mu(x), \quad k=0,\dots,l-1,$$

o equivalentemente

$$\int_{\mathbb{R}} Q^{(l)}_{+a}(x)w_{2,b}(x)x^k d\mu(x)=0, \qquad 0\leq k\leq \nu_{2,b}(l-1)-1, \qquad b=1,\dots,p_2.$$

De la definición para los polinomios asociados destacamos que, $A^{(l)}_{+a,a}$ es mónico y $\deg A^{(l)}_{+a,a}(x)=k_1(l_{+a})$ pero $A^{(l)}_{+a,a'}$ con $a\neq a'$ satisface $\deg A^{(l)}_{+a,a'}\leq k_1((l-1)_{-a'})$. Esto significa que el conjunto de polinomios $A^{(l)}_{+a,a'}(x)$ tienen grados determinados por el multi-índice $\vec{\nu}_1(l-1)+\vec{e}_{1,a}$ y una normalización de tipo II con respecto a la componente a; es decir, $Q^{(l)}_{+a}=Q^{(\mathrm{II},a)}_{[\vec{\nu}_1(l-1)+\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2(l-1)]}$.

De forma similar, las formas lineales asociadas $Q^{(l)}_{-b}(x)$ resuelven un problema de multiortogonalidad mixta que se puede obtener como sigue. De la definición 4.40 y multiplicando por $(\xi^{[l]}_2(x))^\top$ obtenemos

$$Q^{(l)}_{-b}(x)(\xi^{[l+1]}_2(x))^\top=e^\top_{\bar{l}_{-b}}(g^{[l+1]})^{-1}\xi^{[l+1]}_1(x)(\xi^{[l+1]}_2(x))^\top,$$

integrando ambos miembros concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}} Q^{(l)}_{-b}(x)(\xi^{[l+1]}_2(x))^\top d\mu(x)=e^\top_{\bar{l}_{-b}}(g^{[l+1]})^{-1}\int_{\mathbb{R}}\xi^{[l+1]}_1(x)(\xi^{[l+1]}_2(x))^\top d\mu(x)=e^\top_{\bar{l}_{-b}},$$

que escrito en componentes da lugar a

$$\int_{\mathbb{R}} Q^{(l)}_{-b}(x)x^{k_2(k)}w_{2,a_2(k)}(x)d\mu(x)=\delta_{k,\bar{l}_{-b}}, \quad k=0,\cdots,l,$$

o de forma equivalente

$$\int_{\mathbb{R}} Q^{(l)}_{-b}(x)w_{2,b}(x)x^k d\mu(x)=\delta_{k,\bar{l}_{-b}}, \qquad 0\leq k\leq \nu_{2,b}(l)-1, \qquad b=1,\dots,p_2.$$

El conjunto $A^{(l)}_{-b,a'}$ es entonces una solución normalizada de tipo I respecto a la componente b para un problema de ortogonalidad múltiple mixta cuyos los grados satisfacen $\deg A^{(l)}_{-b,a'}\leq k_1(l_{-a'})$. El hecho de que la última condición de ortogonalidad en la componente b no esté presente da lugar a la identificación $Q^{(l)}_{-b}=Q^{(\mathrm{I},b)}_{[\vec{\nu}_1(l);\vec{\nu}_2(l)-\vec{e}_{2,b}]}$.

Las relaciones de ortogonalidad correspondientes a las formas duales asociadas se pueden calcular con la misma técnica, lo que finaliza la prueba. □

Podemos formular entonces la siguiente versión alternativa del teorema 4.41

Proposición 4.43. *Para* $l\geq \max(|\vec{n}_1|,|\vec{n}_2|)$ *se verifica*

$$\begin{aligned}(x-y)K^{[l]}(x,y)=&\sum_{b=1}^{p_2}\tilde{Q}^{(\mathrm{II},b)}_{[\vec{\nu}_2(l-1)+\vec{e}_{2,b};\vec{\nu}_1(l-1)]}(x)Q^{(\mathrm{I},b)}_{[\vec{\nu}_1(l-1);\vec{\nu}_2(l-1)-\vec{e}_{2,b}]}(y)\\&-\sum_{a=1}^{p_1}\tilde{Q}^{(\mathrm{I},a)}_{[\vec{\nu}_2(l-1);\vec{\nu}_1(l-1)-\vec{e}_{1,a}]}(x)Q^{(\mathrm{II},a)}_{[\vec{\nu}_1(l-1)+\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2(l-1)]}(y).\end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}(x-y)K^{[l]}_{b',a'}(x,y)=&\sum_{b=1}^{p_2}\tilde{A}^{(\mathrm{II},b)}_{[\vec{\nu}_2(l-1)+\vec{e}_{2,b};\vec{\nu}_1(l-1)],b'}(x)A^{(\mathrm{I},b)}_{[\vec{\nu}_1(l-1);\vec{\nu}_2(l-1)-\vec{e}_{2,b}],a'}(y)\\&-\sum_{a=1}^{p_1}\tilde{A}^{(\mathrm{I},a)}_{[\vec{\nu}_2(l-1);\vec{\nu}_1(l-1)-\vec{e}_{1,a}],b'}(x)A^{(\mathrm{II},a)}_{[\vec{\nu}_1(l-1)+\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2(l-1)],a'}(y).\end{aligned} \tag{4.100}$$

La ecuación (4.99) es precisamente la fórmula de Christoffel-Darboux obtenida en [38]. La diferencia es que el método empleado aquí está basado en la factorización de Gauss-Borel para la matriz de momentos; es decir, sólo utiliza argumentos algebraicos. El problema de Riemann-Hilbert que aparece en [38] requiere condiciones más restrictivas sobre los pesos. Sin embargo, el lector puede observar que el núcleo Christoffel-Darboux no depende de la escalera concreta determinada por las composiciones $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, sino solo de los multi-índices que indican los grados $\vec{\nu}_1(l-1)$ y $\vec{\nu}_2(l-1)$. Este hecho ya se mencionaba en [37] para la ortogonalidad múltiple de tipo I.

Proposición 4.44. *Los polinomios asociados introducidos en la definición 4.40 tienen la siguiente expresión en forma de determinantes*

$$A^{(l)}_{+a,a'} = \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \chi^{(0)}_{1,a'} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \chi^{(1)}_{1,a'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & \chi^{(l-1)}_{1,a'} \\ \hline g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1} & \chi^{(l_{+a})}_{1,a'} \end{array}\right), \tag{4.101}$$

$$\tilde{A}^{(l)}_{-a,b'}(x) = \frac{(-1)^{l+l_{-a}}}{\det g^{[l+1]}} \det \left(\begin{array}{ccc|c} g_{0,0} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l_{-a}-1,0} & \cdots & g_{l_{-a}-1,l-1} & g_{l_{-a}-1,l} \\ \hdashline g_{l_{-a}+1,0} & \cdots & g_{l_{-a}+1,l-1} & g_{l_{-a}+1,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,l} \\ \hline \chi^{(0)}_{2,b'} & \cdots & \chi^{(l-1)}_{2,b'} & \chi^{(l)}_{2,b'} \end{array}\right), \tag{4.102}$$

$$A^{(l)}_{-b,a'} = \frac{(-1)^{l+\bar{l}_{-b}}}{\det g^{[l+1]}} \det \left(\begin{array}{ccc:ccc|c} g_{0,0} & \cdots & g_{0,\bar{l}_{-b}-1} & g_{0,\bar{l}_{-b}+1} & \cdots & g_{0,l-1} & \chi^{(0)}_{1,a'} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & \cdots & g_{l-1,\bar{l}_{-b}-1} & g_{l-1,\bar{l}_{-b}+1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & \chi^{(l-1)}_{1,a'} \\ \hline g_{l,0} & \cdots & g_{l,\bar{l}_{-b}-1} & g_{l,\bar{l}_{-b}+1} & \cdots & g_{l,l-1} & \chi^{(l)}_{1,a'} \end{array}\right), \tag{4.103}$$

$$\tilde{A}^{(l)}_{+b,b'} = \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,\bar{l}_{+b}} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,\bar{l}_{+b}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,\bar{l}_{+b}} \\ \hline \chi^{(0)}_{2,b'} & \chi^{(1)}_{2,b'} & \cdots & \chi^{(l-1)}_{2,b'} & \chi^{(\bar{l}_{+b})}_{2,b'} \end{array}\right). \tag{4.104}$$

4.2. Conexión con la jerarquía de Toda multi-componente

En esta sección introducimos las deformaciones de la factorización de Gauss-Borel adecuadas para encontrar una conexión con la teoría de jerarquías integrables de tipo Toda en el caso multi-componente. En primer lugar definimos los flujos continuos "clásicos" y a continuación los de tipo discreto, en la línea del capítulo 2.

4.2.1. Deformaciones continuas de la matriz de momentos

Definición 4.45. La matriz deformada de momentos está dada por

$$g_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t) := W_{0,\vec{n}_1}(t) g \tilde{W}_{0,\vec{n}_2}(t)^{-1}, \tag{4.105}$$

donde usamos las matrices semi-infinitas

$$W_{0,\vec{n}_1}(t) := \sum_{a=1}^{p_1} \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} t_{j,a}\Lambda_{1,a}^{j}\Big) \in G_+, \quad \tilde{W}_{0,\vec{n}_2}(t) := \sum_{b=1}^{p_2} \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{t}_{j,b}(\Lambda_{2,b}^{\top})^{j}\Big) \in G_- \tag{4.106}$$

que dependen de la colección de tiempos $t = \{t_{j,a}, \tilde{t}_{j,b}\}$ donde $t_{j,a}, \tilde{t}_{j,b} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots,$ $a = 1, \dots, p_1$ y $b = 1, \dots, p_2$.

Como hicimos anteriormente y cuando el contexto esté claro eliminaremos los subíndices asociados a las composiciones $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

También están bien definidas las siguientes matrices semi-infinitas

$$\begin{aligned}(W_{0,\vec{n}_1}(t)^{-1})^{\top} &= \sum_{a=1}^{p_1} \exp\Big(-\sum_{j=1}^{\infty} t_{j,a}(\Lambda_{1,a}^{\top})^{j}\Big) \in G_-,\\ (\tilde{W}_{0,\vec{n}_2}(t)^{-1})^{\top} &= \sum_{b=1}^{p_2} \exp\Big(-\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{t}_{j,b}\Lambda_{2,b}^{j}\Big) \in G_+.\end{aligned} \tag{4.107}$$

Esta evolución temporal mantiene la estructura que caracteriza a g como una matriz de momentos

Proposición 4.46. *La matriz $g(t)$ es una matriz de momentos para los nuevos "pesos deformados"*

$$\begin{aligned} w_{1,a}(x,t) &= \mathscr{E}_a(x,t) w_{1,a}(x), & \mathscr{E}_a &:= \exp\big(\sum_{j=1}^{\infty} t_{j,a}x^{j}\big),\\ w_{2,b}(x,t) &= \tilde{\mathscr{E}}_b(x,t)^{-1} w_{2,b}(x), & \tilde{\mathscr{E}}_b &:= \exp\big(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{t}_{j,b}x^{j}\big).\end{aligned} \tag{4.108}$$

Demostración. Hay que observar que

$$W_0(t) = \sum_{j\geq 0}\sum_{a=1}^{p_1} \sigma_j^{(a)}(t)\Lambda_{1,a}^{j}, \qquad \tilde{W}_0(t)^{-1} = \sum_{j\geq 0}\sum_{b=1}^{p_2} (\Lambda_{2,b}^{\top})^{j}\tilde{\sigma}_j^{(b)}(t),$$

donde $\sigma_j^{(a)}$ es el j-ésimo polinomio elemental de Schur en las variables t_{ja} y $\tilde{\sigma}_b^{(j)}$ es también un polinomio elemental de Schur pero ahora en las variables $-\tilde{t}_{j,b}$. Para probar (4.108) primero discutimos como es la acción de $\Lambda_{1,a}$ y $\Lambda_{2,b}^{\top}$ en g explícitamente. Recordando (4.13) es fácil ver que

$$(\Lambda_{1,a} g \Lambda_{2,b}^{\top})_{i,j} = \int x^{k_1(i)+1} w_{1,a_1(i)}(x) w_{2,a_2(j)}(x) x^{k_2(j)+1} \delta_{a_1(i),a}\delta_{a_2(j),b} d\mu(x),$$

y consecuentemente se verifica la siguiente expresión

$$(W_0 g \tilde{W}_0^{-1})_{i,j} = \sum_{a=1}^{p_1}\sum_{b=1}^{p_2} \int x^{k_1(i)} \Big(\sum_{l\geq 0} \sigma_l^{(a)} x^{l}\Big) w_{1,a_1(i)}(x) w_{2,a_2(j)}(x) \Big(\sum_{m\geq 0} \tilde{\sigma}_m^{(b)} x^{m}\Big) x^{k_2(j)} \delta_{a_1(i),a}\delta_{a_2(j),b} d\mu(x),$$

que lleva directamente a (4.108). □

Que el signo de los pesos se mantiene bajo las deformaciones está asegurado por el hecho de que todos los tiempos t son reales y las exponenciales son positivas. Estas deformaciones también se pueden considerar como evoluciones temporales, y por lo tanto de ahora en adelante hablaremos indistintamente de deformación/evolución. Si las medidas iniciales tienen soporte acotado entonces no hay problema con el comportamiento exponencial en ∞ de los factores $\mathscr{E}$; sin embargo, para situaciones no acotadas la discusión debe ser hecha caso por caso.

El problema de factorización deformado

$$g_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t) = S(t)^{-1}\tilde{S}(t), \qquad S(t) \in G_-, \qquad \tilde{S}(t) \in G_+, \tag{4.109}$$

con $S(t)$ triangular inferior y $\tilde{S}(t)$ triangular superior, nos da una conexión con los sistemas integrables de tipo Toda. En [9] se analiza el caso de pesos de tipo Nikishin y tenemos que en ese caso para valores de los tiempos suficientemente pequeños la factorización gaussiana tiene sentido al menos localmente.

4.2.2. Ecuaciones de la jerarquía integrable

Introduzcamos ahora las técnicas asociadas al operador de Lax en la factorización LU que conectan el trabajo con una jerarquía multi-componente bidimensional de tipo Toda. Al igual que la descrita en [87] y en el capítulo 2 adoptaremos un enfoque multi-componente, pero la versión que vamos a presentar aquí es una versión escalar y no una de tipo matricial como la estudiada anteriormente.

Definición 4.47. Asociada a la factorización deformada consideramos

1. Las siguientes matrices de onda semi-infinitas

$$W(t) := S(t)W_0(t), \qquad \tilde{W}(t) := \tilde{S}(t)\tilde{W}_0(t). \tag{4.110}$$

2. Las funciones de onda[1] semi-infinitas y sus adjuntas

$$\Psi_a(z,t) := W(t)\chi_{1,a}(z), \qquad \tilde{\Psi}_b(z,t) := \tilde{W}(t)\chi^*_{2,b}(z), \tag{4.111}$$

$$\Psi^*_a(z,t) := (W(t)^{-1})^\top\chi^*_{1,a}(z), \qquad \tilde{\Psi}^*_b(z,t) := (\tilde{W}(t)^{-1})^\top\chi_{2,b}(z). \tag{4.112}$$

3. La matrices de Lax semi-infinitas

$$L_a(t) := S(t)\Lambda_{1,a}S(t)^{-1}, \qquad \tilde{L}_b(t) := \tilde{S}(t)\Lambda^\top_{2,b}\tilde{S}(t)^{-1}. \tag{4.113}$$

4. Las matrices semi-infinitas de Zakharov-Shabat

$$B_{j,a} := (L^j_a)_+, \qquad \tilde{B}_{j,b} := (\tilde{L}^j_b)_-. \tag{4.114}$$

[1] Hay dos diferencias entre esta definición de las funciones de onda (también conocidas como funciones de Baker o de Baker-Akheizer) y las que se definen habitualmente en la literatura. Nuestras modificaciones están motivadas por dos hechos, i) preferimos que $\tilde{\Psi}^*_b$ sea un polinomio en z y no en z^{-1}, salvo factores de tipo onda plana, ii) preferimos que haya una conexión directa entre las funciones de onda y las transformadas de Cauchy de los polinomios, sin necesidad de factores z^{-1} que multipliquen a las transformadas.

De la definición se sigue directamente que

$$L_a \Psi_{a'} = \delta_{a,a'} z \Psi_{a'}, \qquad \tilde{L}_b^\top \tilde{\Psi}_{b'}^* = \delta_{b,b'} z^{-1} \tilde{\Psi}_{b'}^*. \tag{4.115}$$

El lector puede observar que como $S(t) \in G_-$ y $W_0(t) \in G_+$ el producto $W(t) = S(t)W_0(t)$ está bien definido y sus coeficientes son sumas finitas en vez de series. Para $(\tilde{W}(t)^{-1})^\top = (\tilde{S}(t)^{-1})^\top (\tilde{W}_0(t))^{-1})^\top$ podemos utilizar el argumento anterior y el producto está igualmente bien definido. Sin embargo el producto $(W(t)^{-1})^\top = (S(t)^{-1})^\top (W_0(t)^{-1})^\top$ involucra el empleo de series y por lo tanto su existencia no está asegurada, situación que se repite con $\tilde{W}(t) = \tilde{S}(t)\tilde{W}_0(t)$. Sin embargo, la consideración simultánea de los problemas de factorización (4.24) y (4.109) conduce a $S(t)^{-1}\tilde{S}(t) = W_0(t)S^{-1}\tilde{S}\tilde{W}_0(t)^{-1}$ que involucra dos productos con series, particularmente $W_0(t)S^{-1}$ y $\tilde{S}\tilde{W}_0(t)^{-1}$. Estos operadores tienen que estar bien definidos si suponemos la existencia de ambas factorizaciones LU. De aquí en adelante suponemos que existen $\tilde{W}(t)$ y $W^{-1}(t)$, y como veremos de hecho implicarán el uso de series. En el caso de que converjan podremos interpretarlas como transformadas de Cauchy dependientes del tiempo.

Proposición 4.48. *Para las funciones de onda se verifican las siguientes expresiones dependientes del tiempo*

$$\Psi_a^{(k)}(z,t) = A_a^{(k)}(z,t)\mathscr{E}_a(z,t), \qquad (\tilde{\Psi}_b^*)^{(k)}(z,t) = \tilde{A}_b^{(k)}(z,t)\tilde{\mathscr{E}}_b(z,t)^{-1}, \tag{4.116}$$

donde $A_a^{(k)}(x,t), \tilde{A}_b^{(k)}(x,t)$ son polinomios múltiplemente ortogonales y sus polinomios duales (en la variable x) que corresponden a (4.108).

Las formas lineales evolucionadas asociadas a los pesos (4.108) *y sus duales son*

$$\begin{aligned} Q^{(k)}(x,t) &:= \sum_{a=1}^{p_1} A_a^{(k)}(x,t) w_{1,a}(x,t) = \sum_{a=1}^{p_1} \Psi_a^{(k)}(x,t) w_{1,a}(x), \\ \tilde{Q}^{(k)}(x,t) &:= \sum_{b=1}^{p_2} (\tilde{A}_b^*)^{(k)}(x,t) w_{2,b}(x,t) = \sum_{b=1}^{p_2} (\tilde{\Psi}_b^*)^{(k)}(x,t) w_{2,b}(x), \end{aligned} \tag{4.117}$$

que verifican relaciones de bi-ortogonalidad para cada t

$$\int Q^{(l)}(t,x)\tilde{Q}^{(k)}(t,x) d\mu(x) = \delta_{l,k}, \qquad l,k \geq 0, \tag{4.118}$$

y

$$\tilde{\Psi}_b^{(k)}(z,t) = \int \frac{Q^{(k)}(x,t)}{z-x} w_{2,b}(x) d\mu(x), \quad (\Psi_a^*)^{(k)}(z,t) = \int \frac{\tilde{Q}^{(k)}(x,t)}{z-x} w_{1,a}(x) d\mu(x). \tag{4.119}$$

Demostración. De las definiciones (4.111) y (4.112), y el problema de factorización $Wg = \tilde{W}$ concluimos que

$$\tilde{\Psi}_b = \tilde{W}\chi_{2,b}^* = S(W_0 g)\chi_{2,b}^*, \qquad \Psi_a^* = (W^{-1})^\top \chi_{1,a}^* = (\tilde{S}^{-1})^\top (g\tilde{W}_0^{-1})^\top \chi_{1,a}^*.$$

De ahí obtenemos, en términos de formas lineales, las siguientes identidades

$$\tilde{\Psi}_b^{(k)}(z,t) = \int \frac{Q^{(k)}(x,t)}{z-x} w_{2,b}(x) d\mu(x), \qquad (\Psi_a^*)^{(k)}(z,t) = \int \frac{\tilde{Q}^{(k)}(x,t)}{z-x} w_{1,a}(x) d\mu(x),$$

donde las transformadas de Cauchy se entienden como anteriormente.[2] □

Hay que destacar que estas funciones no son las funciones de segunda especie evolucionadas de las formas lineales a las que llamaremos

$$\tilde{C}_b^{(k)}(z,t) := \int \frac{Q^{(k)}(x,t)}{z-x} w_{2,b}(x,t) d\mu(x), \quad (C_a)^{(k)}(z,t) := \int \frac{\tilde{Q}^{(k)}(x,t)}{z-x} w_{1,a}(x,t) d\mu(x). \tag{4.120}$$

Teorema 4.49. *Para $j, j' = 1, 2, \dots,$ $a, a' = 1, \dots, p_1$ y $b, b' = 1, \dots, p_2$ se verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

1. *Sistemas lineales auxiliares para las matrices de onda*

$$\frac{\partial W}{\partial t_{j,a}} = B_{j,a} W, \qquad \frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = \tilde{B}_{j,b} W, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{j,a}} = B_{j,a} \tilde{W}, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = \tilde{B}_{j,b} \tilde{W}. \tag{4.121}$$

2. *Sistemas lineales para las matrices de onda semi-infinitas y sus adjuntas*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Psi_{a'}}{\partial t_{j,a}} = B_{j,a} \Psi_{a'}, && \frac{\partial \Psi_{a'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = \tilde{B}_{j,b} \Psi_{a'}, && \frac{\partial \tilde{\Psi}_{b'}}{\partial t_{j,a}} = B_{j,a} \tilde{\Psi}_{b'}, && \frac{\partial \tilde{\Psi}_{b'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = \tilde{B}_{j,b} \tilde{\Psi}_{b'}, \\ &\frac{\partial \Psi^*_{a'}}{\partial t_{j,a}} = -B_{j,a}^\top \Psi^*_{a'}, && \frac{\partial \Psi^*_{a'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = -\tilde{B}_{j,b}^\top \Psi^*_{a'}, && \frac{\partial \tilde{\Psi}^*_{b'}}{\partial t_{j,a}} = -B_{j,a}^\top \tilde{\Psi}^*_{b'}, && \frac{\partial \tilde{\Psi}^*_{b'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = -\tilde{B}_{j,b}^\top \tilde{\Psi}^*_{b'}. \end{aligned} \tag{4.122}$$

3. *Sistemas lineales para los polinomios múltiplemente ortogonales y sus duales*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathscr{A}_{a'}}{\partial t_{j,a}} = (B_{j,a} - \delta_{a,a'} x^j) \mathscr{A}_{a'}, && \frac{\partial \mathscr{A}_{a'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = (\tilde{B}_{j,b}) \mathscr{A}_{a'}, \\ &\frac{\partial \tilde{\mathscr{A}}_{b'}}{\partial t_{j,a}} = -B_{j,a}^\top \tilde{\mathscr{A}}_{b'}, && \frac{\partial \tilde{\mathscr{A}}_{b'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = (-\tilde{B}_{j,b}^\top + \delta_{b,b'} x^j) \tilde{\mathscr{A}}_{b'}. \end{aligned} \tag{4.123}$$

4. *Ecuaciones de Lax*

$$\frac{\partial L_{a'}}{\partial t_{j,a}} = [B_{j,a}, L_{a'}], \quad \frac{\partial L_{a'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = [\tilde{B}_{j,b}, L_{a'}], \quad \frac{\partial \tilde{L}_{b'}}{\partial t_{j,a}} = [B_{j,a}, \tilde{L}_{b'}], \quad \frac{\partial \tilde{L}_{b'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = [\tilde{B}_{j,b}, \tilde{L}_{b'}]. \tag{4.124}$$

---

[2] Hay una diferencia entre el contexto semi-infinito, adecuado para la construcción de polinomios ortogonales, y el caso doblemente infinito considerado en [118]. En este caso no tenemos expresiones, como existen en el caso bi-infinito del tipo

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_b^{(k)}(z,t) &= (P_0 + P_1 z^{-1} + \cdots) \exp\Big(\sum_{j>0} \tilde{t}_{j,b} z^j\Big), \\ (\Psi_a^*)^{(k)}(z,t) &= (Q_0 + Q_1 z^{-1} + \cdots) \exp\Big(-\sum_{j>0} t_{j,a} z^j\Big). \end{aligned}$$

La razón está en que Λ_a no tiene inverso. En vez de esto, para el caso semi-infinito tenemos

$$(\Lambda_a^\top)^j \chi_a^* = \big[z^j \chi_a^*\big]_- \qquad \Longrightarrow \qquad \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} c_j (\Lambda_a^\top)^j\Big) \chi_a^* = [\exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\Big) \chi_a^*]_-$$

donde el subíndice $-$ se refiere a las potencias negativas en z en el desarrollo de Laurent; mientras que en caso doblemente infinito hay que quitar el subíndice $-$ de la fórmula anterior.

5. *Ecuaciones de Zakharov-Shabat*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_{j,a}}{\partial t_{j',a'}} - \frac{\partial B_{j',a'}}{\partial t_{j,a}} + [B_{j,a}, B_{j',a'}] &= 0,\\
\frac{\partial \tilde{B}_{j,b}}{\partial \tilde{t}_{j',b'}} - \frac{\partial \tilde{B}_{j',b'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} + [\tilde{B}_{j,b}, \tilde{B}_{j',b'}] &= 0,\\
\frac{\partial B_{j,a}}{\partial \tilde{t}_{j',b'}} - \frac{\partial \tilde{B}_{j',b'}}{\partial t_{j,a}} + [B_{j,a}, \tilde{B}_{j',b'}] &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.125}
$$

Demostración. Salvo algunos detalles la prueba es muy similar a la del teorema 2.6, aun así la reproducimos aquí porque se trata de una versión distinta (escalar) de la jerarquía.

Para probar (4.121) procedemos como sigue. En primer lugar calculamos

$$
\frac{\partial W_0}{\partial t_{j,a}} = \Lambda_{1,a}^j W_0, \qquad \frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = (\Lambda_{2,b}^\top)^j \tilde{W}_0,
$$

en segundo lugar vemos que

$$
\frac{\partial W}{\partial t_{j,a}} = \Big(\frac{\partial S}{\partial t_{j,a}} S^{-1} + L_a^j\Big) W, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_{j,a}} = \Big(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t_{j,a}} S^{-1}\Big) \tilde{W}, \tag{4.126}
$$

$$
\frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = \Big(\frac{\partial S}{\partial \tilde{t}_{j,b}} S^{-1}\Big) W, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = \Big(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} \tilde{S}^{-1} + \tilde{L}_b^j\Big) \tilde{W}. \tag{4.127}
$$

Utilizando el problema de factorización obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t_{j,a}} S^{-1} + L_a^j &= \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t_{j,a}} \tilde{S}^{-1},\\
\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} \tilde{S}^{-1} + \tilde{L}_b^j &= \frac{\partial S}{\partial \tilde{t}_{j,b}} S^{-1},
\end{aligned}
$$

que, tomando las partes $+$ y $-$ implican

$$
\frac{\partial S}{\partial t_{j,a}} S^{-1} = -(L_a^j)_-, \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t_{j,a}} \tilde{S}^{-1} = (L_a^j)_+, \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} \tilde{S}^{-1} = -(\tilde{L}_b^j)_+, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{t}_{j,b}} S^{-1} = (\tilde{L}_b^j)_-, \tag{4.128}
$$

de forma que usando (4.128) en (4.126) y (4.127) con las definiciones (4.114) obtenemos (4.121). A partir de ahí los sistemas lineales (4.122) y (4.123) se obtienen de la definición introduciendo (4.111) en (4.121).

Para obtener las ecuaciones de Lax (4.124) tomamos derivadas de (4.113)

$$
\frac{\partial L_{a'}}{\partial t_{j,a}} = \Big[\frac{\partial S}{\partial t_{j,a}} S^{-1}, L_{a'}\Big] = [B_{j,a}, L_{a'}], \qquad \frac{\partial \tilde{L}_{b'}}{\partial t_{j,a}} = \Big[\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t_{j,a}} \tilde{S}^{-1}, \tilde{L}_{b'}\Big] = [B_{j,a}, \tilde{L}_{b'}],
$$

$$
\frac{\partial L_{a'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = \Big[\frac{\partial S}{\partial \tilde{t}_{j,b}} S^{-1}, L_{a'}\Big] = [\tilde{B}_{j,b}, L_{a'}], \qquad \frac{\partial \tilde{L}_{b'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} = \Big[\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}_{j,b}} \tilde{S}^{-1}, \tilde{L}_{b'}\Big] = [\tilde{B}_{j,b}, \tilde{L}_{b'}].
$$

Finalmente, (4.125) se obtienen como condiciones de compatibilidad para (4.121). □

Todas estas ecuaciones proporcionan distintas descripciones de la jerarquía de Toda bidimensional multi-componente que determina los flujos de los polinomios múltiplemente ortogonales respecto a estos pesos deformados. Es la extensión de tipo Toda de la jerarquía KP multi-componente considerada en [21].

4.2.3. Flujos discretos de Darboux-Miwa

Completamos los flujos continuos considerados anteriormente con flujos discretos introducidos en este caso mediante la aplicación de transformaciones de Darboux sucesivas de forma similar a las realizadas en [5].

Definición 4.50. Dadas dos sucesiones de números complejos

$$\lambda_a := \{\lambda_a(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}, \quad a = 1,\dots,p_1, \quad \tilde{\lambda}_b := \{\tilde{\lambda}_b(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}, \quad b = 1,\dots,p_2, \tag{4.129}$$

y dos vectores, $(s_1,\dots,s_{p_1}) \in \mathbb{Z}^{p_1}$ y $(\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_{p_2}) \in \mathbb{Z}^{p_2}$, construimos las siguientes matrices semi-infinitas

$$\begin{aligned}
D_0(s) &:= \sum_{a=1}^{p_1} D_{0,a}(s_a) & D_{0,a}(s_a) &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{s_a}(\Lambda_{1,a} - \lambda_a(n)\Pi_{1,a}), & s_a > 0,\\ \Pi_{1,a}, & s_a = 0,\\ \prod_{n=1}^{|s_a|}(\Lambda_{1,a} - \lambda_a(-n)\Pi_{1,a})^{-1}, & s_a < 0,\end{cases}\\
\tilde{D}_0^{-1}(s) &:= \sum_{b=1}^{p_2} (\tilde{D}_0^{-1})_b(\tilde{s}_b) & (\tilde{D}_0^{-1})_b(\tilde{s}_b) &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{\tilde{s}_b}(\Lambda_{2,b}^\top - \tilde{\lambda}_b(n)\Pi_{2,b}), & \tilde{s}_b > 0,\\ \Pi_{2,b}, & \tilde{s}_b = 0,\\ \prod_{n=1}^{|\tilde{s}_b|}(\Lambda_{2,b}^\top - \tilde{\lambda}_b(-n)\Pi_{2,b})^{-1}, & \tilde{s}_b < 0,\end{cases}
\end{aligned} \tag{4.130}$$

donde $s := \{s_a, \tilde{s}_b\}_{\substack{a=1,\dots,p_1\\ b=1,\dots,p_2}}$ es el conjunto de tiempos discretos, en términos de los cuales definimos la matriz de momentos deformada

$$g(s) = D_0(s) g \tilde{D}_0(s)^{-1}. \tag{4.131}$$

Proposición 4.51. *La matriz $g(s)$ tiene la misma forma que la matriz de momentos g pero con nuevos pesos, en este caso dados por*

$$\begin{aligned}
w_{1,a}(s_a,x) &= \mathscr{D}_a(x,s_a) w_{1,a}(x), & \mathscr{D}_a &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{s_a}(x - \lambda_a(n)), & s_a > 0,\\ 1, & s_a = 0,\\ \prod_{n=1}^{|s_a|}(x - \lambda_a(-n))^{-1}, & s_a < 0,\end{cases}\\
w_{2,b}(\tilde{s}_b,x) &= \tilde{\mathscr{D}}_b(x,\tilde{s}_b)^{-1} w_{2,b}(x), & \tilde{\mathscr{D}}_b^{-1} &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{\tilde{s}_b}(x - \tilde{\lambda}_b(n)), & \tilde{s}_b > 0,\\ 1, & \tilde{s}_b = 0,\\ \prod_{n=1}^{|\tilde{s}_b|}(x - \tilde{\lambda}_b(-n))^{-1}, & \tilde{s}_b < 0,\end{cases}
\end{aligned} \tag{4.132}$$

La evolución discreta propuesta introduce nuevos ceros y polos en los pesos en los puntos determinados por las sucesiones λ. Por ejemplo, en la componente a, el flujo s_a en la dirección positiva, $s_a \to s_a + 1$, introduce un nuevo cero en el punto $\lambda_a(s_a+1)$. El flujo en esa componente en la dirección negativa, $s_a \to s_a - 1$, introduce un polo simple en $\lambda_a(s_a - 1)$. Hasta ahora no hemos asegurado el carácter real de los pesos transformados, que consideraremos después.

Transformaciones de Miwa

Mostraremos ahora que los flujos discretos introducidos aquí están relacionados con los desplazamientos de Miwa en las variables continuas.

Definición 4.52. Llamaremos transformaciones de Miwa a cualquiera de los siguientes tipos de transformaciones

1. Los siguientes desplazamientos temporales que actúan sobre el conjunto de tiempos $\{t_{j,a}\}$

$$t \to t \mp [z^{-1}]_a := \Big\{ t_{j,a'} \mp \delta_{a',a} \frac{1}{jz^j},\ \tilde{t}_{j,b'} \Big\}_{\substack{j=1,2,\dots,\\ a'=1,\dots,p_1,\\ b'=1,\dots,p_2}}, \tag{4.133}$$

2. Los desplazamientos duales, que actúan sobre $\{\tilde{t}_{j,b}\}$

$$t \to t \pm \overline{[z^{-1}]}_b := \Big\{ t_{j,a'},\ \tilde{t}_{j,b'} \pm \delta_{b',b} \frac{1}{jz^j} \Big\}_{\substack{j=1,2,\dots,\\ a'=1,\dots,p_1,\\ b'=1,\dots,p_2}}. \tag{4.134}$$

Proposición 4.53. *Las transformaciones de Miwa actúan de la siguiente forma sobre los pesos*

$$w_{2,b'}(x, t \mp [z^{-1}]_a, s) = w_{2,b'}(x,t,s), \qquad w_{1,a'}(x, t \mp [z^{-1}]_a, s) = \Big(1 - \frac{x}{z}\Big)^{\pm\delta_{a,a'}} w_{1,a'}(x,t,s), \tag{4.135}$$

$$w_{1,a'}(x, t \pm \overline{[z^{-1}]}_b, s) = w_{1,a'}(x,t,s), \qquad w_{2,b'}(x, t \pm \overline{[z^{-1}]}_b, s) = \Big(1 - \frac{x}{z}\Big)^{\pm\delta_{b,b'}} w_{2,b'}(x,t,s). \tag{4.136}$$

Demostración. Cuando consideramos lo que ocurre con los factores de evolución temporal bajo estos desplazamientos obtenemos que

$$\exp\Big(\sum_j t_{j,a'} x^j\Big) \to \exp\Big(\sum_j \Big(t_{j,a'} \mp \delta_{a',a} \frac{x^j}{jz^j}\Big)\Big) = \Big(1 - \frac{x}{z}\Big)^{\mp\delta_{a',a}} \exp\Big(\sum_j t_{j,a'} x^j\Big),$$

y por lo tanto los pesos se transforman como

$$w_{1,a'}(x,t,s) \to \Big(1 - \frac{x}{z}\Big)^{\pm\delta_{a,a'}} w_{1,a'}(x,t,s),$$

que es como las transformaciones discretas consideradas previamente.

Para los flujos duales consideramos lo que les sucede a los factores de evolución temporal bajo estos desplazamientos

$$\exp\Big(-\sum_j \tilde{t}_{j,b'} x^j\Big) \to \exp\Big(-\sum_j \Big(\tilde{t}_{j,b'} \pm \delta_{b',b} \frac{x^j}{jz^j}\Big)\Big) = \Big(1 - \frac{x}{z}\Big)^{\pm\delta_{b',b}} \exp\Big(-\sum_j \tilde{t}_{j,b'} x^j\Big),$$

y la transformación para los pesos es

$$w_{2,b'}(x,t,s) \to \Big(1 - \frac{x}{z}\Big)^{\pm\delta_{b,b'}} w_{2,a'}(x,t,s). \qquad \square$$

Una comparación de (4.132), (4.135) y (4.136) conduce a

Proposición 4.54. *Las transformaciones de Miwa y los flujos discretos se relacionan como sigue*

$$
\begin{aligned}
c_a w_{1,a}(x,t,s_a) &= \begin{cases} w_{1,a}(x, t - \sum_{n=1}^{s_a} \left[\lambda_a(n)^{-1}\right]_a), & s_a > 0,\\ w_{1,a}(x,t), & s_a = 0,\\ w_{1,a}(x, t + \sum_{n=1}^{|s_a|} \left[\lambda_a(-n)^{-1}\right]_a), & s_a < 0, \end{cases} & c_a &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{s_a}(-\lambda_a(n))^{-1}, & s_a > 0\\ 1, & s_a = 0\\ \prod_{n=1}^{|s_a|}(-\lambda_a(-n)), & s_a < 0, \end{cases}\\
\tilde{c}_b w_{2,b}(x,t,\tilde{s}_b) &= \begin{cases} w_{2,b}(x, t + \sum_{n=1}^{\tilde{s}_b} \overline{\left[\tilde{\lambda}_b(n)^{-1}\right]_b}, x), & \tilde{s}_b > 0,\\ w_{2,b}(x,t), & \tilde{s}_b = 0,\\ w_{2,b}(x, t - \sum_{n=1}^{|\tilde{s}_b|} \overline{\left[\tilde{\lambda}_b(-n)^{-1}\right]_b}), & \tilde{s}_b < 0, \end{cases} & \tilde{c}_b &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{\tilde{s}_b}(-\tilde{\lambda}_b(n))^{-1}, & \tilde{s}_b > 0\\ 1, & \tilde{s}_b = 0\\ \prod_{n=1}^{|\tilde{s}_b|}(-\tilde{\lambda}_b(-n)), & \tilde{s}_b < 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.137}
$$

Como conclusión vemos que los flujos discretos se pueden entender como desplazamientos de tipo Miwa. Esto justifica la parte “Miwa” que hemos utilizado para referirnos a ellos.

Medidas con soporte acotado inferiormente

Para que se pueda seguir manteniendo la conexión del problema de factorización con un problema de polinomios múltiplemente ortogonales, estos flujos discretos deben conservar la regularidad, el carácter real y el signo de los pesos. Cuando el soporte de los pesos está acotado inferiormente, una posible solución es colocar todos los nuevos ceros y polos en el eje real pero fuera del correspondiente soporte, $\lambda_a(n) < \inf(\operatorname{supp}(w_{1,a}d\mu))$ y $\tilde{\lambda}_b(n) < \inf(\operatorname{supp}(w_{2,b}d\mu))$. Otra solución es colocarlos en pares conjugados. Aquí estudiaremos esta primera solución

Para analizar el efecto de los flujos discretos en esta jerarquía integrable definimos dos conjuntos de operadores de desplazamiento

Definición 4.55.

1. Consideremos los conjuntos de operadores de desplazamiento $\{T_a\}_{a=1}^{p_1}$ y $\{\tilde{T}_b\}_{b=1}^{p_2}$, donde T_a es el desplazamiento $s_a \mapsto s_a + 1$ y $\tilde{T}_b$ indica $\tilde{s}_b \mapsto \tilde{s}_b + 1$. El resto de las variables $\{s_{a'}, \tilde{s}_{b'}\}$ se mantienen constantes.

2. Introducimos los operadores

$$
\begin{aligned}
q_a &:= \mathbb{I} - \Pi_{1,a}(\mathbb{I} + \lambda_a(s_a+1)) + \Lambda_{1,a},\\
\tilde{q}_b &:= \mathbb{I} - \Pi_{2,b}(\mathbb{I} + \tilde{\lambda}_b(\tilde{s}_b+1)) + \Lambda_{2,b}^{\top}.
\end{aligned}
\tag{4.138}
$$

3. También definimos los operadores

$$
\begin{aligned}
\delta_a &:= S q_a S^{-1} = \mathbb{I} - C_{aa}(\mathbb{I} + \lambda_a(s_a+1)) + L_a, & \tilde{\delta}_b &:= \tilde{S}\tilde{q}_b\tilde{S}^{-1} = \mathbb{I} - \tilde{C}_{bb}(\mathbb{I} + \tilde{\lambda}_b(\tilde{s}_b+1)) + \tilde{L}_b,\\
C_{aa} &:= S\Pi_{1,a}S^{-1}, & \tilde{C}_{bb} &:= \tilde{S}\Pi_{2,b}\tilde{S}^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4.139}
$$

Aquí las matrices δ_a y $\tilde{\delta}_b$ se llaman resolventes de red [21].

4. Finalmente las matrices de onda semi-infinitas se definen como

$$
W := SD_0, \qquad \tilde{W} := \tilde{S}\tilde{D}_0. \tag{4.140}
$$

Se puede comprobar que

$$
\begin{aligned}
(T_a D_0) D_0^{-1} &= q_a, \quad \tilde{D}_0^{-1}(T_a \tilde{D}_0) = \mathbb{I}, \\
\tilde{D}_0(\tilde{T}_b \tilde{D}_0^{-1}) &= \tilde{q}_b, \quad (\tilde{T}_b D_0) D_0^{-1} = \mathbb{I}.
\end{aligned}
\tag{4.141}
$$

Vamos a suponer que las matrices semi-infinitas δ_a y $\tilde{\delta}_b$ son factorizables LU como en (4.24), es decir, sus menores principales no se anulan. Podemos entonces escribir

$$
\delta_a = \delta_{a,-}^{-1} \delta_{a,+}, \qquad \tilde{\delta}_b = \tilde{\delta}_{b,-}^{-1} \tilde{\delta}_{b,+}, \tag{4.142}
$$

donde $\delta_{a,-}$ y $\tilde{\delta}_{b,-}$ son triangulares inferiores como S en (4.24), y $\delta_{a,+}$ y $\tilde{\delta}_{b,+}$ son triangulares superiores como $\tilde{S}$ en (4.24).

Cuando la matriz deformada $g(s)$ es factorizable, y por lo tanto tiene sentido plantear un nuevo problema de ortogonalidad múltiple para el sistema deformado, tenemos que

Proposición 4.56. *Si la matriz de momentos deformada $g(s)$ es factorizable para todos los valores de s entonces también lo son δ_a y $\tilde{\delta}_b$ con*

$$
\begin{aligned}
\delta_{a,+} &= (T_a \tilde{S}) \tilde{S}^{-1}, \quad \delta_{a,-} = (T_a S) S^{-1}, \\
\tilde{\delta}_{b,+} &= (\tilde{T}_b \tilde{S}) \tilde{S}^{-1}, \quad \tilde{\delta}_{b,+} = (\tilde{T}_b S) S^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4.143}
$$

Demostración. Cuando aplicamos los desplazamientos discretos al problema de factorización $g(s) = S^{-1}(s) \tilde{S}(s)$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
T_a(S^{-1}) T_a(\tilde{S}) = T_a g(s) = (T_a D_0) D_0^{-1} g(s) = q_a g(s) \quad &\Rightarrow \quad ((T_a S) S^{-1})^{-1} (T_a \tilde{S}) \tilde{S}^{-1} = \delta_a, \\
\tilde{T}_b(S^{-1}) \tilde{T}_b(\tilde{S}) = \tilde{T}_b g(s) = g(s) \tilde{D}_0 (T_b \tilde{D}_0^{-1}) = g(s) \tilde{q}_b \quad &\Rightarrow \quad ((\tilde{T}_b S) S^{-1})^{-1} ((\tilde{T}_b \tilde{S}) \tilde{S}^{-1} = \tilde{\delta}_b,
\end{aligned}
$$

y se cumple el resultado enunciado. □

Podemos considerar entonces la siguiente definición

Definición 4.57. Definimos las matrices semi-infinitas ω_a y $\tilde{\omega}_b$ como

$$
\omega_a := \delta_{a,-} \delta_a = \delta_{a,+}, \qquad \tilde{\omega}_b := \tilde{\delta}_{b,-} = \tilde{\delta}_{b,+} \tilde{\delta}_b^{-1}, \tag{4.144}
$$

y se puede ver que

Proposición 4.58. 1. *Se verifican los siguientes sistemas lineales*

$$
\begin{aligned}
T_a W &= \omega_a W, \quad T_a \tilde{W} = \omega_a \tilde{W}, \\
\tilde{T}_b W &= \tilde{\omega}_b W, \quad \tilde{T}_b \tilde{W} = \tilde{\omega}_b \tilde{W}.
\end{aligned}
\tag{4.145}
$$

2. *Las matrices de Lax satisfacen las siguientes relaciones*

$$
\begin{aligned}
T_a L_{a'} &= \omega_a L_{a'} \omega_a^{-1}, \quad T_a \tilde{L}_b = \omega_a \tilde{L}_b \omega_a^{-1}, \\
\tilde{T}_b L_a &= \tilde{\omega}_b L_a \tilde{\omega}_b^{-1}, \quad \tilde{T}_b \tilde{L}_{b'} = \tilde{\omega}_b \tilde{L}_{b'} \tilde{\omega}_b^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4.146}
$$

3. *Las condiciones discretas de compatibilidad de Zakharov-Shabat para este caso son las siguientes*

$$
(T_a \omega_{a'}) \omega_a = (T_{a'} \omega_a) \omega_{a'}, \qquad (T_a \tilde{\omega}_b) \omega_a = (\tilde{T}_b \omega_a) \tilde{\omega}_b, \qquad (\tilde{T}_b \tilde{\omega}_{b'}) \tilde{\omega}_b = (\tilde{T}_{b'} \tilde{\omega}_b) \tilde{\omega}_{b'}. \tag{4.147}
$$

4. Cuando se consideran simultáneamente los flujos discretos y continuos , se obtienen las ecuaciones mixtas

$$
\begin{aligned}
T_{a'}B_{j,a} &= \frac{\partial \omega_{a'}}{\partial t_{j,a}}\omega_{a'}^{-1} + \omega_{a'}B_{j,a}\omega_{a'}^{-1}, \quad & \tilde{T}_b B_{j,a} &= \frac{\partial \tilde{\omega}_b}{\partial t_{j,a}}\tilde{\omega}_b^{-1} + \tilde{\omega}_b B_{j,a}\tilde{\omega}_b^{-1},\\
T_a\tilde{B}_{j,b} &= \frac{\partial \omega_a}{\partial \tilde{t}_{j,b}}\omega_a^{-1} + \omega_a\tilde{B}_{j,b}\omega_a^{-1}, \quad & \tilde{T}_{b'}\tilde{B}_{j,b} &= \frac{\partial \tilde{\omega}_{b'}}{\partial \tilde{t}_{j,b}}\tilde{\omega}_{b'}^{-1} + \tilde{\omega}_{b'}\tilde{B}_{j,b}\tilde{\omega}_{b'}^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4.148}
$$

Demostración. Calculamos

$$
\begin{aligned}
&T_aW = (T_aS)(T_aD_0) = (T_aS)S^{-1}Sq_aS^{-1}SD_0 = \delta_{a,-}\delta_aW = \delta_{a,+}W,\\
&T_a\tilde{W} = (T_a\tilde{S})\tilde{D}_0 = (T_a\tilde{S})\tilde{S}^{-1}\tilde{S}\tilde{D}_0 = \delta_{a,+}\tilde{W},\\
&\tilde{T}_bW = (\tilde{T}_bS)D_0 = (\tilde{T}_bS)S^{-1}SD_0 = \tilde{\delta}_{b,-}W,\\
&\tilde{T}_b\tilde{W} = (\tilde{T}_b\tilde{S})(T_b\tilde{D}_0) = (T_b\tilde{S})\tilde{S}^{-1}\tilde{S}\tilde{q}_b^{-1}\tilde{S}^{-1}\tilde{S}\tilde{D}_0 = \tilde{\delta}_{b,+}\tilde{\delta}_b^{-1}\tilde{W} = \tilde{\delta}_{b,-}\tilde{W},
\end{aligned}
$$

de donde deducimos (4.145), que implica (4.146) y (4.147). □

Para considerar simultáneamente los flujos discretos y continuos hay que reemplazar los operadores $W_0 \to W_0D_0$ y $\tilde{W}_0 \to \tilde{W}_0\tilde{D}_0$. La modificación correspondiente de los flujos de los pesos se obtiene mediante la multiplicación de los factores de evolución discretos y continuos. En este contexto obtenemos ecuaciones como (4.148).

Estos flujos discretos se pueden entender como sucesiones de transformaciones de Darboux de tipo LU y *UL* en la terminología de [5], que motiva la parte “Darboux” que se les da. De hecho, tenemos que los resolventes de red satisfacen

$$
\begin{aligned}
\delta_a &= \delta_{a,-}^{-1}\delta_{a,+} \quad &\Rightarrow \quad T_a\delta_a &= \omega_a\delta_a\omega_a^{-1} = \delta_{a,+}\delta_{a,-}^{-1}\delta_{a,+}\delta_{a,+}^{-1} = \delta_{a,+}\delta_{a,-}^{-1},\\
\tilde{\delta}_b &= \tilde{\delta}_{b,-}^{-1}\tilde{\delta}_{b,+} \quad &\Rightarrow \quad \tilde{T}_b\tilde{\delta}_b &= \tilde{\omega}_b\tilde{\delta}_b\tilde{\omega}_b^{-1} = \tilde{\delta}_{b,-}\tilde{\delta}_{b,-}^{-1}\tilde{\delta}_{b,+}\tilde{\delta}_{b,-}^{-1} = \tilde{\delta}_{b,+}\tilde{\delta}_{b,-}^{-1},
\end{aligned}
\tag{4.149}
$$

que es la típica permutación de la factorización LU en la factorización *UL*. Cuando solo hay una componente tenemos $\delta = L + \lambda$ y $\tilde{\delta} = \tilde{\lambda} + \tilde{L}$ y el desplazamiento corresponde a las transformaciones clásicas de Darboux LU y *UL*.

Si $A_a^{(k)}(x,s), \tilde{A}_b^{(k)}(x,s)$ son los polinomios múltiplemente ortogonales y sus duales en la variable x que corresponden a la evolución discreta de los pesos (4.132) respectivamente tenemos la versión discreta de la proposición 4.48.

Proposición 4.59. *Las funciones de onda y sus adjuntas son*

$$
\Psi_a^{(k)}(z,s) = A_a^{(k)}(z,s)\mathscr{D}_a(z,s_a) \qquad (\tilde{\Psi}_b^*)^{(k)}(z,s) = \tilde{A}_b^{(k)}(z,s)\tilde{\mathscr{D}}_b(z,\tilde{s}_b)^{-1}, \tag{4.150}
$$

y las formas lineales

$$
Q^{(k)}(x,s) = \sum_{a=1}^{p_1} A_a^{(k)}(x,s)w_{1,a}(x,s), \qquad \tilde{Q}^{(k)}(x,s) = \sum_{b=1}^{p_2}(\tilde{A}_b)^{(k)}(x,s)w_{2,b}(x,s), \tag{4.151}
$$

se pueden expresar como

$$
Q^{(k)}(x,s) := \sum_{a=1}^{p_1} \Psi_a^{(k)}(x,s)w_{1,a}(x), \qquad \tilde{Q}^{(k)}(x,s) := \sum_{b=1}^{p_2}(\tilde{\Psi}_b^*)^{(k)}(x,s)w_{2,b}(x). \tag{4.152}
$$

Para las demás funciones de onda tenemos las ecuaciones

$$
\tilde{\Psi}_b^{(k)}(z,s) = \int \frac{Q^{(k)}(x,s)}{z-x}w_{2,b}(x)d\mu(x), \quad (\Psi_a^*)^{(k)}(z,s) = \int \frac{\tilde{Q}^{(k)}(x,s)}{z-x}w_{1,a}(x)d\mu(x). \tag{4.153}
$$

Aquí las transformadas de Cauchy se pueden interpretar exactamente en los mismos términos que en la proposición 4.14. Hay que tener en cuenta también que las ecuaciones (4.153) no corresponden a las evoluciones temporales de las transformadas

$$\tilde{C}_b^{(k)}(z,s) := \int \frac{Q^{(k)}(x,s)}{z-x} w_{2,b}(x,s)d\mu(x), \quad C_a^{(k)}(z,s) := \int \frac{\tilde{Q}^{(k)}(x,s)}{z-x} w_{1,a}(x,s)d\mu(x). \tag{4.154}$$

Lema 4.60. *Tenemos que*

$$\begin{aligned}
\omega_a &= \omega_{a,0}\Lambda^{|\vec{n}_1|-n_{1,a}+1} + \omega_{a,1}\Lambda^{|\vec{n}_1|-n_{1,a}} + \dots + \omega_{a,|\vec{n}_1|-n_{1,a}+1},\\
\tilde{\omega}_b &= \tilde{\omega}_{b,0}(\Lambda^\top)^{|\vec{n}_2|-n_{2,b}+1} + \tilde{\omega}_{b,1}(\Lambda^\top)^{|\vec{n}_2|-n_{2,b}} + \dots + \tilde{\omega}_{b,|\vec{n}_2|-n_{2,b}+1},\\
\omega_a^\top &= \rho_{a,0}(\Lambda^\top)^{|\vec{n}_1|-n_{1,a}+1} + \rho_{a,1}(\Lambda^\top)^{|\vec{n}_1|-n_{1,a}} + \dots + \rho_{a,|\vec{n}_1|-n_{1,a}+1},\\
\tilde{\omega}_b^\top &= \tilde{\rho}_{b,0}\Lambda^{|\vec{n}_2|-n_{2,b}+1} + \tilde{\rho}_{b,1}\Lambda^{|\vec{n}_2|-n_{2,b}} + \dots + \rho_{b,|\vec{n}_2|-n_{2,b}+1},
\end{aligned} \tag{4.155}$$

para ciertas matrices diagonales semi-infinitas

$$\begin{aligned}
\omega_{a,j} &= \operatorname{diag}(\omega_{a,j}(0), \omega_{a,j}(1), \dots),\\
\tilde{\omega}_{b,j} &= \operatorname{diag}(\tilde{\omega}_{b,j}(0), \tilde{\omega}_{b,j}(1), \dots),\\
\rho_{a,j} &= \operatorname{diag}(\rho_{a,j}(0), \rho_{a,j}(1), \dots),\\
\tilde{\rho}_{b,j} &= \operatorname{diag}(\tilde{\rho}_{b,j}(0), \tilde{\rho}_{b,j}(1), \dots),
\end{aligned} \tag{4.156}$$

con

$$\begin{aligned}
\rho_{a,j}(k) &:= \omega_{a,j}(k - |\vec{n}_1| + n_{1,a} - 1 + j),\\
\tilde{\rho}_{b,j}(k) &:= \tilde{\omega}_{b,j}(k + |\vec{n}_2| - n_{2,b} + 1 - j).
\end{aligned} \tag{4.157}$$

Este lema, junto a la siguiente definición

Definición 4.61.

$$\begin{aligned}
\gamma_{a,a'}(s,x) &:= (1 - \delta_{a,a'}(1 + \lambda_a(s_a+1) - x)),\\
\gamma_{b,b'}(s,x) &:= (1 - \delta_{b,b'}(1 + \tilde{\lambda}_b(\tilde{s}_b+1) - x)),
\end{aligned} \tag{4.158}$$

conduce al siguiente resultado

Proposición 4.62. *Se verifican las siguientes ecuaciones de tipo discreto*

$$\begin{aligned}
(T_{a'}A_a^{(k)})\gamma_{a,a'} &= \omega_{a',0}(k)A_a^{(k+|\vec{n}_1|-n_{1,a'}+1)} + \dots + \omega_{a',|\vec{n}_1|-n_{1,a'}+1}(k)A_a^{(k)},\\
\tilde{T}_{b'}A_a^{(k)} &= \tilde{\omega}_{b',0}(k)A_a^{(k-|\vec{n}_2|+n_{2,b'}-1)} + \dots + \tilde{\omega}_{b',|\vec{n}_2|-n_{2,b'}+1}(k)A_a^{(k)},
\end{aligned} \tag{4.159}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{a',0}(k)(T_{a'}\tilde{A}_b^{(k-|\vec{n}_1|+n_{1,a'}-1)}) + \dots + \rho_{a',|\vec{n}_1|-n_{1,a'}+1}(k)(T_{a'}\tilde{A}_b^{(k)}) &= \tilde{A}_b^{(k)},\\
\Big(\tilde{\rho}_{b',0}(k)(\tilde{T}_{b'}\tilde{A}_b^{(k+|\vec{n}_2|-n_{2,b'}+1)}) + \dots + \tilde{\rho}_{b',|\vec{n}_2|-n_{2,b'}+1}(k)(\tilde{T}_{b'}\tilde{A}_b^{(k)})\Big)\tilde{\gamma}_{b,b'} &= \tilde{A}_b^{(k)}.
\end{aligned} \tag{4.160}$$

Demostración. Para probar (4.159) utilizamos los sistemas auxiliares discretos para W, mientras que para (4.160) consideramos que

$$\omega_a^\top T_a((\tilde{W}^{-1})^\top) = (\tilde{W}^{-1})^\top, \qquad \tilde{\omega}_b^\top \tilde{T}_b((\tilde{W}^{-1})^\top) = (\tilde{W}^{-1})^\top. \qquad \square$$

Las relaciones (4.159) y (4.160) son entre polinomios múltiplemente ortogonales pertenecientes a la misma escalera pero con distintos pesos. Relacionan los polinomios para los pesos $w_{1,a}, w_{2,b}$ con los correspondientes a los pesos $T_{a'}w_{1,a}, T_{a'}w_{2,b}$ o $\tilde{T}_{b'}w_{1,a}, \tilde{T}_{b'}w_{2,b}$.

Transformaciones de Darboux iteradas Cuando los soportes de las medidas no están acotados inferiormente, podemos dar una forma alternativa de construir flujos discretos que conserva el signo de las medidas. La construcción está basada en la anterior, pero ahora el desplazamiento es la composición de dos traslaciones consecutivas asociadas al par $\lambda_a(n)$ y $\lambda_a(n+1)$, que son complejos conjugados.

Definición 4.63. Definimos la matriz deformada de momentos

$$g(s) = D_0'(s) g(\tilde{D}_0'(s))^{-1}, \tag{4.161}$$

con

$$\begin{aligned} D_0'(s) &:= \sum_{a=1}^{p_1} D_{0,a}', \\ D_{0,a}'(s_a) &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{s_a} \left(|\lambda_a(n)|^2 \Pi_{1,a} - 2\operatorname{Re}(\lambda_a(n))\Lambda_{1,a} + \Lambda_{1,a}^2\right), & s_a > 0, \\ \Pi_{1,a}, & s_a = 0, \\ \prod_{n=1}^{|s_a|} \left(|\lambda_a(-n)|^2 \Pi_{1,a} - 2\operatorname{Re}(\lambda_a(-n))\Lambda_{1,a} + \Lambda_{1,a}^2\right)^{-1}, & s_a < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.162}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{D}_0')^{-1}(s) &:= \sum_{b=1}^{p_2} \left((\tilde{D}_0(s)')^{-1}(\tilde{s}_b)\right)_b, \\ \left((\tilde{D}_0(s)')^{-1}\right)_b &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{\tilde{s}_b} (|\tilde{\lambda}_b(n)|^2 \Pi_{2,b} - 2\operatorname{Re}(\tilde{\lambda}_b(n))\Lambda_{2,b}^\top) + (\Lambda_{2,b}^\top)^2)) & \tilde{s}_b > 0, \\ \Pi_{2,b}, & \tilde{s}_b = 0, \\ (\prod_{n=1}^{\tilde{s}_b} \left(|\tilde{\lambda}_b(-n)|^2 \Pi_{2,b} - 2\operatorname{Re}(\tilde{\lambda}_b(-n))\Lambda_{2,b}^\top) + (\Lambda_{2,b}^\top)^2\right)^{-1}, & \tilde{s}_b < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.163}$$

Proposición 4.64. *La matriz de momentos definida anteriormente corresponde a una matriz de momentos con los siguientes pesos evolucionados*

$$\begin{aligned} w_{1,a}(s,x) &= \mathscr{D}_a'(x, s_a) w_{1,a}(x), & \mathscr{D}_a' &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{s_a} |x - \lambda_a(n)|^2, & s_a > 0, \\ 1, & s_a = 0, \\ \prod_{n=1}^{|s_a|} |x - \lambda_a(-n)|^{-2}, & s_a < 0, \end{cases} \\ w_{2,b}(s,x) &= \tilde{\mathscr{D}}_b'(x, \tilde{s}_b)^{-1} w_{2,b}(x), & (\tilde{\mathscr{D}}_b')^{-1} &:= \begin{cases} \prod_{n=1}^{\tilde{s}_b} |x - \tilde{\lambda}_b(n)|^2, & \tilde{s}_b > 0, \\ 1, & \tilde{s}_b = 0, \\ \prod_{n=1}^{|\tilde{s}_b|} |x - \tilde{\lambda}_b(-n)|^{-2}, & \tilde{s}_b < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.164}$$

Calculando como en el caso anterior

Definición 4.65. Introducimos

$$\begin{aligned} q_a' &:= \mathbb{I} - \Pi_{1,a}(\mathbb{I} - |\lambda_a(s_a+1)|^2) - 2\operatorname{Re}(\lambda_a(s_a+1))\Lambda_{1,a} + \Lambda_{1,a}^2, \\ \tilde{q}_b' &:= \mathbb{I} - \Pi_{2,b}(\mathbb{I} - |\tilde{\lambda}_b(\tilde{s}_b+1)|^2) - 2\operatorname{Re}(\tilde{\lambda}_b(\tilde{s}_b+1))(\Lambda_{2,b}^\top) + (\Lambda_{2,b}^\top)^2, \end{aligned} \tag{4.165}$$

y

$$\begin{aligned} \delta_a' &:= \mathbb{I} - C_{aa}(\mathbb{I} - |\lambda_a(s_a+1)|^2) - 2\operatorname{Re}(\lambda_a(s_a+1))L_a + L_a^2, \\ \tilde{\delta}_b' &:= \mathbb{I} - \tilde{C}_{bb}(\mathbb{I} - |\tilde{\lambda}_b(\tilde{s}_b+1)|^2) - 2\operatorname{Re}(\tilde{\lambda}_b(\tilde{s}_b+1))\tilde{L}_b + \tilde{L}_b^2. \end{aligned} \tag{4.166}$$

Las funciones de Baker y Baker adjunta tienen ahora la forma

$$\Psi_a^{(k)}(z,s) = A_a^{(k)}(z,s)\mathscr{D}'_a(z,s_a), \qquad (\tilde{\Psi}_b^*)^{(k)}(z,s) = \tilde{A}_b^{(k)}(z,s)\tilde{\mathscr{D}}'_b(z,\tilde{s}_b)^{-1}. \tag{4.167}$$

Si introducimos ω'_a y $\tilde{\omega}'_b$ como en (4.144) pero reemplazando δ por δ', las ecuaciones (4.145)-(4.148) siguen siendo ciertas reemplazando ω por ω'. Ahora, la forma de ω' es distinta de la de (4.155) ya que en este caso tenemos

$$\begin{aligned} \omega'_a &= \omega'_{a,0}\Lambda^{2(|\vec{n}_1|-n_{1,a}+1)} + \cdots + \omega'_{a,2(|\vec{n}_1|-n_{1,a}+1)}, \\ \tilde{\omega}'_b &= \tilde{\omega}'_{b,0}(\Lambda^\top)^{2(|\vec{n}_2|-n_{2,b}+1)} + \cdots + \tilde{\omega}'_{b,2(|\vec{n}_2|-n_{2,b}+1)}. \end{aligned} \tag{4.168}$$

Con la definición de

$$\begin{aligned} \gamma'_{a,a'}(s,x) &:= (1-\delta_{a,a'}(1-|x-\lambda_a(s_a+1)|^2), \\ \gamma'_{b,b'}(s,x) &:= (1-\delta_{b,b'}(1-|x-\tilde{\lambda}_b(\tilde{s}_b+1)|^2), \end{aligned} \tag{4.169}$$

obtenemos

Proposición 4.66. *El conjunto de ecuaciones* (4.159) *y* (4.160) *se pueden reemplazar en este caso por*

$$\begin{cases} (T_{a'}A_a^{(k)})\gamma'_{a,a'} = \omega'_{a',0}A_a^{(k+2(|\vec{n}_1|-n_{1,a}+1))} + \cdots + \omega_{a',2(|\vec{n}_1|-n_{1,a}+1)}(k)A_a^{(k)}, \\ \tilde{T}_{b'}A_a^{(k)} = \tilde{\omega}'_{b,0}(k)A_a^{(k-2(|\vec{n}_2|-n_{2,b'}+1))} + \cdots + \tilde{\omega}'_{b,2(|\vec{n}_2|-n_{2,b'}+1)}A_a^{(k)}, \end{cases} \tag{4.170}$$

$$\begin{cases} \rho'_{a',0}(T_{a'}\tilde{A}_b^{(k-2(|\vec{n}_1|-n_{1,a'}+1))}) + \cdots + \rho'_{a',2(|\vec{n}_1|-n_{1,a'}+1)}(k)(T_{a'}\tilde{A}_b^{(k)}) = \tilde{A}_b^{(k)}, \\ \Big(\tilde{\rho}'_{b',0}(k)(\tilde{T}_{b'}\tilde{A}_b^{(k+2(|\vec{n}_2|-n_{2,b'}+1)}) + \cdots + \tilde{\rho}'_{b',2(|\vec{n}_2|-n_{2,b'}+1)}(\tilde{T}_{b'}\tilde{A}_b^{(k)})\Big)\tilde{\gamma}'_{b,b'} = \tilde{A}_b^{(k)}. \end{cases} \tag{4.171}$$

4.2.4. Simetrías, relaciones de recurrencia y *string equations*

Reanudamos ahora la discusión de la simetría de la matriz de momentos con la que empezamos en 4.1.5 pero ahora empleando la evolución dinámica de los pesos y utilizando los operadores de Lax. La primera observación es la siguiente proposición

Proposición 4.67. *La potencia j-ésima de la matriz evolucionada de Jacobi introducida en 4.1.5 está relacionada con las matrices de Lax a través de la string equation:*

$$J^j = \sum_{a=1}^{p_1} L_a^j = \sum_{b=1}^{p_2} \tilde{L}_b^j, \qquad j = 1,2,\dots, \tag{4.172}$$

y los polinomios múltiplemente ortogonales son autovectores:

$$J^j \mathscr{A}_{a'} = x^j \mathscr{A}_{a'}, \qquad (J^j)^\top \tilde{\mathscr{A}}_{b'} = x^j \tilde{\mathscr{A}}_{b'}, \tag{4.173}$$

para $a' = 1,\dots,p_1$ y $b' = 1,\dots,p_2$.

Demostración. Usando (4.70) se puede probar por inducción en j que para cualquier $j \geq 1$ se satisface la siguiente ecuación

$$\Lambda_{1,a}^j g \Pi_{2,b} = \Pi_{1,a} g (\Lambda_{2,b}^\top)^j,$$

de modo que

$$L^j_a\tilde{C}_{bb}=C_{aa}\tilde{L}^j_b,$$

y sumando sobre a,b deducimos (4.172).

La ecuación (4.173) se obtiene como sigue

$$\begin{aligned}J^j\mathscr{A}_{a'}&=S\sum_{a=1}^{p_1}\Lambda^j_{1,a}S^{-1}S\chi_{1,a'}=x^j\mathscr{A}_{a'},\\(J^j)^\top\tilde{\mathscr{A}}_{a'}&=(\tilde{S}^{-1})^\top\sum_{b=1}^{p_2}\Lambda^j_{2,a}\tilde{S}^\top(\tilde{S}^{-1})^\top\chi_{2,b'}=x^j\tilde{\mathscr{A}}_{b'}.\end{aligned}\qquad\square$$

Veamos ahora que la simetría (4.70) introduce una determinada invariancia en las matrices de Lax y los polinomios múltiplemente ortogonales

Proposición 4.68. *Se satisfacen las siguientes relaciones para $j=1,2,\dots$*

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{p_1}\frac{\partial L_{a'}}{\partial t_{j,a}}+\sum_{b=1}^{p_2}\frac{\partial L_{a'}}{\partial\tilde{t}_{j,b}}=0, &&\sum_{a=1}^{p_1}\frac{\partial \tilde{L}_{b'}}{\partial t_{j,a}}+\sum_{b=1}^{p_2}\frac{\partial \tilde{L}_{b'}}{\partial\tilde{t}_{j,b}}=0,\\&\sum_{a=1}^{p_1}\frac{\partial \mathscr{A}_{a'}}{\partial t_{j,a}}+\sum_{b=1}^{p_2}\frac{\partial \mathscr{A}_{a'}}{\partial\tilde{t}_{j,b}}=0, &&\sum_{a=1}^{p_1}\frac{\partial \tilde{\mathscr{A}}_{b'}}{\partial t_{j,a}}+\sum_{b=1}^{p_2}\frac{\partial \tilde{\mathscr{A}}_{b'}}{\partial\tilde{t}_{j,b}}=0.\end{aligned}\tag{4.174}$$

Demostración. Tomando partes $+$ y $-$ en (4.172) obtenemos

$$\sum_{a=1}^{p_1}L^j_a=\sum_{a=1}^{p_1}(L^j_a)_++\sum_{a=1}^{p_1}(L^j_a)_-=\sum_{a=1}^{p_1}(L^j_a)_++\sum_{b=1}^{p_2}(\tilde{L}^j_b)_-=\sum_{a=1}^{p_1}B_{j,a}+\sum_{b=1}^{p_2}\tilde{B}_{j,b}=\sum_{b=1}^{p_2}\tilde{L}^j_b.$$

Usando las ecuaciones de Lax y observando que $L_aL_{a'}=L_{a'}L_a$ y $\tilde{L}_b\tilde{L}_{b'}=\tilde{L}_{b'}\tilde{L}_b$ tenemos las siguientes simetrías para los operadores de Lax

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{p_1}\frac{\partial L_{a'}}{\partial t_{j,a}}+\sum_{b=1}^{p_2}\frac{\partial L_{a'}}{\partial\tilde{t}_{j,b}}&=\Big[\sum_{a=1}^{p_1}B_{j,a}+\sum_{b=1}^{p_2}\tilde{B}_{j,b},L_{a'}\Big]=\sum_{a=1}^{p_1}[L^j_a,L_{a'}]=0,\\\sum_{a=1}^{p_1}\frac{\partial \tilde{L}_{b'}}{\partial t_{j,a}}+\sum_{b=1}^{p_2}\frac{\partial \tilde{L}_{b'}}{\partial\tilde{t}_{j,b}}&=\Big[\sum_{a=1}^{p_1}B_{j,a}+\sum_{b=1}^{p_2}\tilde{B}_{j,b},\tilde{L}_{b'}\Big]=\sum_{b=1}^{p_2}[\tilde{L}^j_b,\tilde{L}_{b'}]=0.\end{aligned}$$

De (4.123) concluimos que los polinomios múltiplemente ortogonales y sus duales son también invariantes

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{p_1}\frac{\partial \mathscr{A}_{a'}}{\partial t_{j,a}}+\sum_{b=1}^{p_2}\frac{\partial \mathscr{A}_{a'}}{\partial\tilde{t}_{j,b}}&=\Big(\sum_{a=1}^{p_1}B_{j,a}+\sum_{b=1}^{p_2}\tilde{B}_{j,b}-x^j\Big)\mathscr{A}_{a'}=(J^j-x^j)\mathscr{A}_{a'}=0,\\\sum_{a=1}^{p_1}\frac{\partial \tilde{\mathscr{A}}_{b'}}{\partial t_{j,a}}+\sum_{b=1}^{p_2}\frac{\partial \tilde{\mathscr{A}}_{b'}}{\partial\tilde{t}_{j,b}}&=-\Big(\sum_{a=1}^{p_1}B_{j,a}+\sum_{b=1}^{p_2}\tilde{B}_{j,b}-x^j\Big)^\top\tilde{\mathscr{A}}_{b'}=-\big(J^j-x^j\big)^\top\tilde{\mathscr{A}}_{a'}=0.\end{aligned}\qquad\square$$

4.2.5. Ecuaciones bilineales y funciones τ

La prueba de la identidad bilineal necesita tres lemas previos. Para el primero, sean $W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}$ y $\tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}$ las matrices de ondas asociadas a la matriz de momentos $g_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}$, de modo que se verifique $W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}g_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}=\tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}$. Entonces, tenemos

Lema 4.69. *Las matrices de onda asociadas a las diferentes composiciones y tiempos satisfacen*

$$W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\pi^\top_{\vec{n}_1',\vec{n}_1}W_{\vec{n}_1',\vec{n}_2'}(t',s')^{-1} = \tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\pi^\top_{\vec{n}_2',\vec{n}_2}\tilde{W}_{\vec{n}_1',\vec{n}_2'}(t',s')^{-1}, \tag{4.175}$$

Demostración. Consideremos simultáneamente las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)g &= \tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s),\\ W_{\vec{n}_1',\vec{n}_2'}(t',s')\pi_{\vec{n}_1',\vec{n}_1}g\pi^\top_{\vec{n}_2',\vec{n}_2} &= \tilde{W}_{\vec{n}_1',\vec{n}_2'}(t',s'), \end{aligned}$$

donde $g = g_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}$, y obtenemos

$$W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)^{-1}\tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s) = \pi^\top_{\vec{n}_1',\vec{n}_1}W_{\vec{n}_1',\vec{n}_2'}(t',s')^{-1}\tilde{W}_{\vec{n}_1',\vec{n}_2'}(t',s')\pi_{\vec{n}_2',\vec{n}_2} = g,$$

a partir de donde obtenemos el resultado deseado. □

Para el segundo lema, sea $(\cdot)_{-1}$ el coeficiente en z^{-1} del desarrollo de Laurent alrededor de $z=\infty$ (que es donde tienen sentido las transformadas de Cauchy).

Lema 4.70. *Para los vectores χ_a se satisfacen las siguientes identidades*

$$\Big(\sum_{a=1}^{p}\chi_a(\chi_a^*)^\top\Big)_{-1} = \Big(\sum_{a=1}^{p}\chi_a^*\chi_a^\top\Big)_{-1} = \mathbb{I}, \tag{4.176}$$

y por lo tanto

Lema 4.71. *Para cualquier par de matrices semi-infinitas U y V tenemos*

$$\begin{aligned} UV &= \Big(\sum_{a=1}^{p_1}(U\chi_{1,a})(V^\top\chi_{1,a}^*)^\top\Big)_{-1} &\quad (4.177)\\ &= \Big(\sum_{b=1}^{p_2}(U\chi_{2,b}^*)(V^\top\chi_{2,b})^\top\Big)_{-1}, &\quad (4.178) \end{aligned}$$

Demostración. Se sigue del lema 4.70:

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{a=1}^{p_1}(U\chi_{1,a})(V^\top\chi_{1,a}^*)^\top\Big)_{-1} &= U\Big(\sum_{a=1}^{p_1}\chi_{1,a}(\chi_{1,a}^*)^\top\Big)_{-1}V = UV,\\ \Big(\sum_{b=1}^{p_2}(U\chi_{2,b}^*)(V^\top\chi_{2,b})^\top\Big)_{-1} &= U\Big(\sum_{b=1}^{p_2}\chi_{2,b}^*\chi_{2,b}^\top\Big)_{-1}V = UV. \end{aligned}$$ □

Tenemos entonces el siguiente teorema

Teorema 4.72. *1. Las funciones de onda y sus duales satisfacen la llamada ecuación bilineal*

$$\sum_{a=1}^{p_1}\oint_\infty \Psi^{(k)}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2,a}(z,t,s)(\Psi^*_{\vec{n}_1',\vec{n}_2',a})^{(l)}(z,t',s')dz = \sum_{b=1}^{p_2}\oint_\infty \tilde{\Psi}^{(k)}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2,b}(z,t,s)(\tilde{\Psi}^*_{\vec{n}_1',\vec{n}_2',b})^{(l)}(z,t',s')dz. \tag{4.179}$$

2. *Los polinomios múltiplemente ortogonales, sus duales y las correspondientes transformadas de Cauchy verifican también la ecuación bilineal*

$$\sum_{a=1}^{p_1}\oint_{\infty} A^{(k)}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2,a}(z,t,s)\tilde{C}^{(l)}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2,a}(z,t',s')E_a(z)dz=\sum_{b=1}^{p_2}\oint_{\infty} C^{(k)}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2,b}(z,t,s)\tilde{A}^{(l)}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2,b}(z,t',s')\tilde{E}_b(z)dz, \tag{4.180}$$

donde

$$E_a:=(\mathscr{E}_a\mathscr{D}_a)(z,t,s)((\mathscr{E}_a\mathscr{D}_a)(z,t',s'))^{-1},\qquad \tilde{E}_b:=(\tilde{\mathscr{E}}_b\tilde{\mathscr{D}}_b)(z,t,s)((\tilde{\mathscr{E}}_b\tilde{\mathscr{D}}_b)(z,t',s'))^{-1}. \tag{4.181}$$

Demostración. 1. Por una parte fijemos en la ecuación (4.177) $U=W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)$ y $V=\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}W_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s')^{-1}$. Por otra parte podemos considerar (4.178) donde fijamos $U=\tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)$ y $V=\pi^{\top}_{\vec{n}'_2,\vec{n}_2}\tilde{W}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s')^{-1}$. Si tenemos en cuenta (4.175), recordando que $\Psi_{\vec{n}_1,\vec{n}_2,a}=W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\chi_{\vec{n}_1,a}$, $\tilde{\Psi}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2,b}=\tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\chi^*_{\vec{n}_2,b}$ y observando que se verifica que $\Psi^*_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2,a}=(W^{-1}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2})^{\top}\pi_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}\chi^*_{\vec{n}_1,a}$ y $\tilde{\Psi}^*_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2,b}=(\tilde{W}^{-1}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2})^{\top}\pi_{\vec{n}'_2,\vec{n}_2}\chi_{\vec{n}_2,b}$ obtenemos la identidad bilineal para funciones de onda.[3]

2. Podemos escribir

$$\begin{aligned}&W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}W_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s')^{-1}=\\ &\qquad=(S_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)W_{0,\vec{n}_1}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}(W_{0,\vec{n}'_1}(t',s'))^{-1}\pi_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1})\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}S_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s')^{-1},\end{aligned}$$

que sugiere considerar en (4.177)

$$U=S_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)W_{0,\vec{n}_1}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}(W_{0,\vec{n}'_1}(t',s'))^{-1}\pi_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1},\qquad V=\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}S_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s')^{-1}.$$

Análogamente

$$\begin{aligned}&\tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}\tilde{W}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s')^{-1}=\\ &\qquad=(\tilde{S}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\tilde{W}_{0,\vec{n}_1}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}(\tilde{W}_{0,\vec{n}'_1}(t',s'))^{-1}\pi_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1})\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}\tilde{S}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s')^{-1},\end{aligned}$$

esto sugiere fijar en (4.178)

$$U=\tilde{S}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\tilde{W}_{0,\vec{n}_2}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_2,\vec{n}_2}(\tilde{W}_{0,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}\pi_{\vec{n}'_2,\vec{n}_2},\qquad V=\pi^{\top}_{\vec{n}'_2,\vec{n}_2}\tilde{S}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s')^{-1}.$$

La aplicación de (4.177),(4.178) y (4.175) da las ecuaciones bilineales alternativas (4.180) donde hemos usado las transformadas evolucionadas de Cauchy (4.120) e introducido los factores de evolución. □

Los factores de evolución en la definición son los introducidos introducidos en (4.108) y (4.132), de forma que asumimos que los flujos discretos se aplican a medidas con soporte acotado inferiormente. Si consideramos las transformaciones discretas iteradas hay que reemplazar los factores $\mathscr{D}$ por los factores $\mathscr{D}'$ en (4.164).

[3]En el miembro derecho estamos trabajando en $z=\infty$ en vez de, como es habitual, en $z=0$; la razón es que para la definición de $\tilde{\mathscr{A}}_b$ hemos usado χ_2 en vez de χ_2^*, para obtener polinomios en z, mientras que lo habitual es obtener polinomios en z^{-1}.

Supongamos que tenemos pesos lo suficientemente regulares, para los que se pueden utilizar los teoremas de Fubini y Cauchy, y que se consideran solo un número finito de flujos continuos. En ese caso el lado izquierdo y derecho de la ecuación bilineal son proporcionales a $\int_{\mathbb{R}} Q^{(k)}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(x,t)\tilde{Q}^{(l)}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(x,t')d\mu(x)$. Esto es consecuencia directa del siguiente resultado

Proposición 4.73. *Se verifica la siguiente identidad*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Q_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(x,t,s)\tilde{Q}^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(x,t',s')d\mu(x) &= W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}(W_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}\\ &= \tilde{W}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_2,\vec{n}_2}(\tilde{W}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}.\end{aligned} \tag{4.182}$$

Demostración. Seguimos la siguiente cadena de identidades

$$\begin{aligned}W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}(W_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1} &= W_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}g_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(\tilde{W}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}\\ &= S_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)W_{0,\vec{n}_1}(t,s)\pi^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}_1}\Big(\int \xi_{\vec{n}'_1}(x)\xi^{\top}_{\vec{n}'_2}(x)d\mu(x)\Big)(W_{0,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}(\tilde{S}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}\\ &= S_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)W_{0,\vec{n}_1}(t,s)\Big(\int \xi_{\vec{n}_1}(x)\xi^{\top}_{\vec{n}'_2}(x)d\mu(x)\Big)(W_{0,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}(\tilde{S}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}\\ &= S_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)\Big(\int \xi_{\vec{n}_1}(x,t,s)\xi^{\top}_{\vec{n}'_2}(x,t',s')d\mu(x)\Big)(\tilde{S}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}\\ &= \int (S_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(t,s)(\xi_{\vec{n}_1}(x,t,s))(\tilde{S}^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(t',s'))^{-1}\xi_{\vec{n}'_2}(x,t',s'))^{\top}d\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} Q_{\vec{n}_1,\vec{n}_2}(x,t,s)\tilde{Q}^{\top}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2}(x,t',s')d\mu(x),\end{aligned}$$

donde $\xi_{\vec{n}_1}(x,t,s)$ y $\xi_{\vec{n}'_2}(x,t',s')$ representan vectores de monomios con los pesos evolucionados.

$\square$

Para terminar el capítulo vamos a calcular las funciones τ asociadas a los polinomios múltiplemente ortogonales definidos en este capítulo.

Definición 4.74. Definamos las siguientes matrices

$$g^{[l+1]}_{+a} := \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,l}\\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,l}\\ \hdashline g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1} & g_{l_{+a},l}\end{pmatrix} \quad \tilde{g}^{[l+1]}_{+b} := \left(\begin{array}{cccc:c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,\bar{l}_{+b}}\\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,\bar{l}_{+b}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,\bar{l}_{+b}}\\ g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} & g_{l,\bar{l}_{+b}}\end{array}\right). \tag{4.183}$$

La matriz $g^{[l+1]}_{+a}$ se obtiene de $g^{[l+1]}$ reemplazando la última fila por

$$(g_{l_{+a},0}, g_{l_{+a},1}, \dots, g_{l_{+a},l-1}, g_{l_{+a},l}),$$

mientras que $\tilde{g}^{[l+1]}_{+b}$ se obtiene de $g^{[l+1]}$ reemplazando la última columna por

$$(g_{0,\bar{l}_{+b}}, g_{1,\bar{l}_{+b}}, \dots, g_{l-1,\bar{l}_{+b}}, g_{l,\bar{l}_{+b}})^{\top},$$

(lo que indicamos con la linea discontinua). Está claro de la definición que si $a_1(l) = a$ entonces $g^{[l+1]}_{+a} = g^{[l+1]}$ y si $a_2(l) = b$ entonces $\tilde{g}^{[l+1]}_{+b} = g^{[l+1]}$. Los menores de estas matrices (4.183) serán designados como $M^{[l+1]}_{i,j} = \tilde{M}^{[l+1]}_{i,j}$ para $g^{[l+1]}$, $M^{[l+1]}_{+a,i,j}$ para $g^{[l+1]}_{+a}$ y $\tilde{M}^{[l+1]}_{+b,i,j}$ para $\tilde{g}^{[l+1]}_{+b}$.

Ahora definimos los siguientes determinantes, que son cofactores de las matrices definidas anteriormente

Definición 4.75. Las funciones τ están definidas como sigue

$$\tau^{(l)}_{+a,-a'} := (-1)^{l+l_{-a'}} M^{[l+1]}_{+a,l_{-a'},l}, \quad \tau^{(l)}_{-b,-a} := (-1)^{\tilde{l}_{-b}+l_{-a}} M^{[l+1]}_{l_{-a},\tilde{l}_{-b}}, \tag{4.184}$$

$$\tilde{\tau}^{(l)}_{+b,-b'} := (-1)^{l+\tilde{l}_{-b'}} \tilde{M}^{[l+1]}_{+b,l,\tilde{l}_{-b'}}, \quad \tilde{\tau}^{(l)}_{-a,-b} := (-1)^{l_{-a}+\tilde{l}_{-b}} \tilde{M}^{[l+1]}_{l_{-a},\tilde{l}_{-b}}. \tag{4.185}$$

Además,

1. Si $a_1(l) = a$ entonces definimos $\tau^{(l)}_{-a'} := \tau^{(l)}_{+a,-a'}$ y $\tilde{\tau}^{(l)}_{-b} := \tilde{\tau}^{(l)}_{-a,-b}$.
2. Si $a_2(l) = b$ entonces definimos $\tau^{(l)}_{-a} := \tau^{(l)}_{-b,-a}$ y $\tilde{\tau}^{(l)}_{-b'} := \tilde{\tau}^{(l)}_{+b,-b'}$.
3. Definimos también $\tau^{(l)} = \tilde{\tau}^{(l)} := \det g^{[l]}$, $\tau^{(l+1)}_{+a} := \det g^{[l+1]}_{+a}$ y $\tilde{\tau}^{(l+1)}_{+b} := \det \tilde{g}^{[l+1]}_{+b}$.

Si $a_1(l) = a$ entonces $\tau^{(l+1)}_{+a} = \tau^{(l+1)}$, y si $a_2(l) = b$ entonces $\tilde{\tau}^{(l+1)}_{+b} = \tau^{(l+1)}$.

Dada una combinación perfecta $(\mu, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ y el conjunto de polinomios múltiplemente ortogonales asociado a ella $\{A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}\}_{a=1}^{p_1}$, con grados tales que $|\vec{\nu}_1| = |\vec{\nu}_2| + 1$, siempre existe una escalera $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ y un entero l con $|\vec{\nu}_1| = l + 1$ y $|\vec{\nu}_2| = l$ tal que los polinomios $\{A^{(l)}_a\}_{a=1}^{p_1}$ coinciden con $\{A_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}\}_{a=1}^{p_1}$. Las funciones τ no dependen de la escalera escogida salvo por un signo global. Una forma de fijar este signo es elegir la escalera $\vec{n}_1 = \vec{\nu}_1$ y $\vec{n}_2 = \vec{\nu}_2 + \vec{e}_{p_2}$. Definimos entonces las siguientes funciones τ que solo dependen de los multi-índices $\vec{\nu}_1$ y $\vec{\nu}_2$

$$\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2]} := \tau^{(l)}_{\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2}, \qquad l = |\vec{\nu}_1| - 1 = |\vec{\nu}_2|, \tag{4.186}$$

y deducimos el siguiente resultado

Proposición 4.76. *Dados dos multi-índices $(\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)$ tales que $|\vec{\nu}_1| = |\vec{\nu}_2| + 1$, dos composiciones con $\vec{n}_1 = \vec{\nu}_1$ y $\vec{n}_2 = \vec{\nu}_2 + \vec{e}_{p_2}$ y un $l = |\vec{\nu}_1| - 1 = |\vec{\nu}_2|$, tenemos las siguientes identidades*

$$\tau^{(l)}_{+a,-a'} = \varepsilon_{1,1}(a,a')\tau_{[\vec{\nu}_1-\vec{e}_{1,a'}+\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2]}, \quad \tilde{\tau}^{(l)}_{+b,-b'} = \varepsilon_{2,2}(b,b')\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2-\vec{e}_{2,b'}+\vec{e}_{2,b}]},$$
$$\tau^{(l)}_{-b,-a} = \tilde{\tau}^{(l)}_{-a,-b} = \varepsilon_{2,1}(b,a)\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1}-\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}-\vec{e}_{2,b}]},$$

donde

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{1,1}(a,a') &:= (-1)^{\sum_{j=1}^{a}\nu_{1,j}+\sum_{j=1}^{a'}\nu_{1,j}+\delta_{a,p_1}-1}, && a' < a\\
\varepsilon_{1,1}(a,a') &:= (-1)^{\sum_{j=1}^{a}\nu_{1,j}+\sum_{j=1}^{a'}\nu_{1,j}+\delta_{a',p_1}}, && a' > a\\
\varepsilon_{2,2}(b,b') &:= (-1)^{\sum_{j=1}^{b}\nu_{2,j}+\sum_{j=1}^{b'}\nu_{2,j}-1}, && b' < b\\
\varepsilon_{2,2}(b,b') &:= (-1)^{\sum_{j=1}^{b}\nu_{2,j}+\sum_{j=1}^{b'}\nu_{2,j}}, && b' > b\\
\varepsilon_{2,1}(b,a) &:= (-1)^{\sum_{j=1}^{b}\nu_{2,j}+\sum_{j=1}^{a}\nu_{1,j}+\delta_{b,p_2}},\\
\varepsilon_{1,1}(a,a) &:= 1 = \varepsilon_{2,2}(b,b).
\end{aligned}$$

En particular

$$\tau^{(l)}_{-a} = \varepsilon_{1,1}(p_1,a)\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1}-\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2]}, \qquad \tilde{\tau}^{(l)}_{-b} = \varepsilon_{2,2}(p_2,b)\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}-\vec{e}_{2,b}]},$$
$$\tau^{(l+1)}_{+a} = \varepsilon_{1,1}(a,p_1)\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}]}, \qquad \tilde{\tau}^{(l+1)}_{+b} = \varepsilon_{2,2}(b,p_2)\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,b}]}.$$

Ahora, usando estas funciones τ procedemos a buscar representaciones de los polinomios múltiplemente ortogonales, sus duales, las transformadas de Cauchy y las ecuaciones bilineales. Para ello necesitamos dos lemas

Lema 4.77. *1. Sea $R^{(j)}$ la fila j-ésima de $\tau^{(l)}(t)$ y $R^{(j)}_z$ la fila j-ésima de $\tau^{(l)}(t-[z^{-1}]_a)$, entonces*

$$R^{(j)}_z = R^{(j)} - \delta_{a_1(j),a} z^{-1} R^{(j')}, \tag{4.187}$$

donde $j' = j+1$ si $r_1(j) < n_{1,a}-1$, pero $j' = j + (|\vec{n}_1| - n_{1,a}) + 1$ si $r_1(j) = n_{1,a}-1$. Esto también se verifica para $\tau^{(l)}_{-a}$, $\tau^{(l)}_{+a,-a'}$ y para $\tau^{(l)}_{-b,-a'}$.

2. Sea ahora $C^{(j)}$ la columna j-ésima de $\tilde{\tau}^{(l)}$ y $C^{(j)}_z$ la columna j-ésima de $\tilde{\tau}^{(l)}(t+\overline{[z^{-1}]}_b)$, entonces

$$C^{(j)}_z = C^{(j)} - \delta_{a_2(j),b} z^{-1} C^{(j')}, \tag{4.188}$$

donde $j' = j+1$ si $r_2(l) < n_{2,b}-1$ pero $j' = j + (|\vec{n}_2| - n_{2,b}) + 1$ si $r_2(j) = n_{2,b}-1$. También se verifica lo mismo para $\tilde{\tau}^{(l)}_{-b}$, $\tilde{\tau}^{(l)}_{+b,-b'}$ y para $\tilde{\tau}^{(l)}_{-a,-b'}$.

Demostración. Se sigue directamente de (4.135) y (4.136). □

El carácter multilineal antisimétrico de los determinantes nos permite expresarlos como productos exteriores de covectores. Tenemos entonces

Lema 4.78. *Dado un conjunto de covectores $\{r_1,\dots,r_n\}$ se puede ver que*

$$\bigwedge_{j=1}^{n}(zr_j - r_{j+1}) = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j} z^{j-1}\, r_1\wedge r_2\wedge\cdots\wedge\hat{r}_j\wedge\cdots\wedge r_{n+1}, \tag{4.189}$$

donde la notación $\hat{r}_j$ significa que hemos eliminado el covector r_j en el producto exterior $r_1\wedge\cdots\wedge r_{n+1}$.

Demostración. Se puede proceder directamente por inducción. □

Las funciones τ permiten expresiones compactas para los polinomios múltiplemente ortogonales:

Teorema 4.79. *1. Los polinomios múltiplemente ortogonales mixtos $A^{(l)}_a$, $A^{(l)}_{+a',a}$ y $A^{(l)}_{-b,a}$ tienen la siguiente representación en términos de funciones τ*

$$A^{(l)}_a(z) = A^{(\mathrm{II},a_1(l))}_{[\vec{\nu}_1(l);\vec{\nu}_2(l-1)],a} = z^{\nu_{1,a}(l)-1}\frac{\tau^{(l)}_{-a}(t-[z^{-1}]_a)}{\tau^{(l)}(t)}, \qquad l\geq 1, \tag{4.190}$$

$$A^{(l)}_{+a',a}(z) = A^{(\mathrm{II},a')}_{[\vec{\nu}_1(l-1)+\vec{e}_{1,a'};\vec{\nu}_2(l-1)],a} = z^{\nu_{1,a}(l-1)+\delta_{a,a'}-1}\frac{\tau^{(l)}_{+a',-a}(t-[z^{-1}]_a)}{\tau^{(l)}(t)}, \quad l\geq 1, \tag{4.191}$$

$$A^{(l)}_{-b,a}(z) = A^{(\mathrm{I},b)}_{[\vec{\nu}_1(l);\vec{\nu}_2(l)-\vec{e}_{2,b}],a} = z^{\nu_{1,a}(l)-1}\frac{\tau^{(l)}_{-b,-a}(t-[z^{-1}]_a)}{\tau^{(l+1)}(t)}, \qquad l\geq 1. \tag{4.192}$$

2. Los polinomios duales $\tilde{A}^{(l)}_{b}$, $\tilde{A}^{(l)}_{+b',b}$, y $\tilde{A}^{(l)}_{-a,b}$ tienen la siguiente representación en términos de funciones τ

$$\tilde{A}^{(l)}_{b}(z)=\tilde{A}^{(\mathrm{I},a_2(b))}_{[\vec{\nu}_2(l);\vec{\nu}_1(l-1)],b}=z^{\nu_{2,b}(l)-1}\frac{\tilde{\tau}^{(l)}_{-b}(t+\overline{[z^{-1}]}_b)}{\tau^{(l+1)}(t)},\qquad l\geq 1,\quad(4.193)$$

$$\tilde{A}^{(l)}_{+b',b}(z)=\tilde{A}^{(\mathrm{II},b')}_{[\vec{\nu}_2(l-1)+\vec{e}_{2,b'};\vec{\nu}_1(l-1)],b}=z^{\nu_{2,b}(l-1)+\delta_{b,b'}-1}\frac{\tilde{\tau}^{(l)}_{+b',-b}(t+\overline{[z^{-1}]}_b)}{\tau^{(l)}(t)},\quad l\geq 1,\quad(4.194)$$

$$\tilde{A}^{(l)}_{-a,b}(z)=\tilde{A}^{(\mathrm{I},a)}_{[\vec{\nu}_2(l);\vec{\nu}_1(l)-\vec{e}_{1,a}],b}=z^{\nu_{2,b}(l)-1}\frac{\tilde{\tau}^{(l)}_{-a,-b}(t+\overline{[z^{-1}]}_b)}{\tau^{(l+1)}(t)},\qquad l\geq 1.\quad(4.195)$$

Demostración. La prueba del teorema 4.79 se apoya en el lema 4.77, el lema 4.78, el corolario 4.12 y la proposición 4.44.

Examinemos primero (4.190); está claro que $z^{\nu_{1,a}(l)-1}\tau^{(l)}_{-a}(t-[z^{-1}]_a)$ se puede desarrollar en z usando (4.187) con $\tau^{(l)}_{-a}$ y (4.189). Para ello tomemos $n=k_1(l_{-a})$ y los covectores r_j igual al conjunto de filas $R^{(j)}$ con $a_1(j)=a$. Haciendo esto vemos que hay solo $k_1(l_{-a})(=\nu_{1,a}(l)-1)$ filas que se transforman de forma no trivial. Con esto llegamos a la identificación de la expresión (4.52) con (4.190), donde los términos correspondientes al producto en el que falta un covector corresponde al menor $M^{[l+1]}_{j,l}$. Ahora, fijándonos en (4.191) y (4.192) desarrollamos de nuevo en z y usamos la misma técnica basada en (4.187) para $\tau^{(l)}_{+a,-a'}$ y $\tau^{(l)}_{-b,-a}$ además de (4.189). Esto permite identificar los desarrollos en z que se obtienen en (4.101) con (4.191) y (4.103) con (4.192).

Para probar (4.193) procedemos de forma similar. Empleando (4.188) para $\tilde{\tau}^{(l)}_{-b}$ vemos también que solo hay $k_2(\tilde{l}_{-b})(=\nu_{2,b}(l)-1)$ columnas que se transforman de forma no trivial. Ahora empleamos de nuevo (4.189) con $n=k_2(\tilde{l}_{-b})$ y elegimos los r_j igual a las columnas $C^{(j)}$ tales que $a_2(j)=b$, lo que permite comparar las expresiones en z que se obtienen de (4.54) y (4.193). La misma técnica permite ver que (4.104) y (4.102) son iguales a (4.194) y (4.195) respectivamente. □

Si utilizamos la escalera $(\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2})$ y tomamos que $l=|\vec{\nu}_2|=|\vec{\nu}_1|-1$ tenemos

$$\begin{aligned}\vec{\nu}_1(l)&=\vec{\nu}_1, & \vec{\nu}_2(l-1)&=\vec{\nu}_2,\\ \vec{\nu}_1(l-1)&=\vec{\nu}_1-\vec{e}_{1,p_1}, & \vec{\nu}_2(l)&=\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2},\end{aligned}$$

lo que permite obtener expresiones a partir del teorema 4.79 que solo dependen de los multiíndices $(\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2)$ como las que siguen

$$\begin{aligned}A^{(\mathrm{II},p_1)}_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],a}(z)&=\varepsilon_{1,1}(p_1,a)z^{\nu_{1,a}-1}\frac{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1}-\vec{e}_{1,a}a;\vec{\nu}_2]}(t-[z^{-1}]_a)}{\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2]}(t)},\\ A^{(\mathrm{II},a')}_{[\vec{\nu}_1-\vec{e}_{1,p_1}+\vec{e}_{1,a'};\vec{\nu}_2],a}(z)&=\varepsilon_{1,1}(a',a)z^{\nu_{1,a}-\delta_{a,p_1}+\delta_{a,a'}-1}\frac{\tau_{[\vec{\nu}_1-\vec{e}_{1,a}+\vec{e}_{1,a'};\vec{\nu}_2]}(t-[z^{-1}]_a)}{\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2]}(t)},\\ A^{(\mathrm{I},b)}_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}-\vec{e}_{2,b}],a}(z)&=\varepsilon_{2,1}(b,a)z^{\nu_{1,a}-1}\frac{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1}-\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}-\vec{e}_{2,b}]}(t-[z^{-1}]_a)}{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}]}(t)},\end{aligned}\qquad(4.196)$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}^{(\mathrm{I},p_2)}_{[\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2};\vec{\nu}_1-\vec{e}_{p_1}],b}(z) &= \varepsilon_{2,2}(p_2,b) z^{\nu_{2,b}+\delta_{b,p_2}-1}\frac{\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}-\vec{e}_{2,b}]}(t+\overline{[z^{-1}]}_b)}{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}]}(t)},\\
\tilde{A}^{(\mathrm{II},b')}_{[\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,b'};\vec{\nu}_1-\vec{e}_{1,p_1}],b} &= \varepsilon_{2,2}(b,b') z^{\nu_{2,b}+\delta_{b',b}-1}\frac{\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2-\vec{e}_{2,b}+\vec{e}_{2,b'}]}(t+\overline{[z^{-1}]}_b)}{\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2]}(t)},\\
\tilde{A}^{(\mathrm{I},a)}_{[\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2};\vec{\nu}_1-\vec{e}_{1,a}],b} &= \varepsilon_{2,1}(b,a) z^{\nu_{2,b}+\delta_{b,p_2}-1}\frac{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1}-\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}-\vec{e}_{2,b}]}(t+\overline{[z^{-1}]}_b)}{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}]}(t)}.
\end{aligned}
\tag{4.197}
$$

El siguiete objetivo es encontrar representaciones para las transformadas de Cauchy en términos de funciones τ. Para ello necesitamos otros dos lemas

Lema 4.80. *1. Sea $R^{(j)}$ la j-ésima fila de $g^{[l+1]}_{+a}$ y $R^{(j)}_z$ la j-ésima fila de $g^{[l+1]}_{+a}(t+[z^{-1}]_a)$, entonces tenemos que*

$$
R^{(j)}_z = R^{(j)} + \delta_{a_1(j),a}\sum_{j'=1}^{\infty} z^{-k_1(j')}R^{(j+j')}\delta_{a_1(j+j'),a}. \tag{4.198}
$$

2. Sea $C^{(j)}$ la columna j-ésima de $\tilde{g}^{[l+1]}_{+b}$ y $C^{(j)}_z$ la columna j-ésima de $\tilde{g}^{[l+1]}_{+b}(t-\overline{[z^{-1}]}_b)$, entonces (4.136) *da lugar a la siguiente transformación*

$$
C^{(j)}_z = C^{(j)} + \delta_{a_2(j),b}\sum_{j'=1}^{\infty} z^{-k_2(j')}C^{(j+j')}\delta_{a_2(j+j'),b}. \tag{4.199}
$$

Demostración. Para la primera igualdad introducimos la expresión de la serie geométrica

$$
\Big(1-\frac{x}{z}\Big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{z^k}
$$

en (4.136) y la otra ecuación se prueba de forma similar. □

Lema 4.81. *Se verifica la siguiente identidad*

$$
\bigwedge_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} r_{j+i}z^{-i}\Big) = r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-1}\wedge\Big(\sum_{i=0}^{\infty} r_{n+i}z^{-i}\Big). \tag{4.200}
$$

Demostración. Se puede usar la inducción en n. □

Estamos ya en condiciones de enunciar el resultado deseado

Teorema 4.82. *Las transformadas de Cauchy tienen la siguiente representación en términos de funciones τ*

$$
C^{(l)}_a = z^{-\nu_{1,a}(l-1)-1}\frac{\tau^{(l+1)}_{+a}(t+[z^{-1}]_a)}{\tau^{(l+1)}(t)}, \tag{4.201}
$$

$$
\tilde{C}^{(l)}_b = z^{-\nu_{2,b}(l-1)-1}\frac{\tilde{\tau}^{(l+1)}_{+b}(t-\overline{[z^{-1}]}_b)}{\tau^{(l)}(t)}. \tag{4.202}
$$

Demostración. Se realiza empleando los lemas para comparar que las series en z de (4.62) y (4.61) son exactamente la misma. □

Esto conduce a la representación

$$C^{(\mathrm{I},p_2)}_{[\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2};\vec{\nu}_1-\vec{e}_{1,p_1}],a}(z)=\varepsilon_{1,1}(a,p_1)z^{-\nu_{1,a}-1+\delta_{a,p_1}}\frac{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}]}(t+[z^{-1}]_a)}{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,p_2}]}(t)},$$

$$C^{(\mathrm{II},p_1)}_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2],b}(z)=\varepsilon_{2,2}(b,p_2)z^{-\nu_{2,b}-1}\frac{\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,b}]}(t-\overline{[z^{-1}]}_b)}{\tau_{[\vec{\nu}_1;\vec{\nu}_2]}(t)}.$$

La representación de los polinomios múltiplemente ortogonales y sus transformadas de Cauchy en términos de funciones τ da lugar a la siguiente expresión alternativa de la ecuación bilineal

Proposición 4.83. *Las funciones τ verifican las siguientes ecuaciones bilineales*

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{p_1}\oint_{z=\infty} & z^{\nu_{1,a}(k)-\nu'_{1,a}(l-1)-2}\tau^{(k)}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2,-a}(t-[z^{-1}]_a)\tau^{(l+1)}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2,+a}(t'+[z^{-1}]_a)E_a(z)dz\\ &=\sum_{b=1}^{p_2}\oint_{z=\infty} z^{\nu'_{2,b}(l)-\nu_{2,b}(k-1)-2}\tilde{\tau}^{(k+1)}_{\vec{n}_1,\vec{n}_2,+b}(t-\overline{[z^{-1}]}_b)\tilde{\tau}^{(l)}_{\vec{n}'_1,\vec{n}'_2,-b}(t'+\overline{[z^{-1}]}_b)\tilde{E}_b(z)dz. \quad (4.203)\end{aligned}$$

Demostración. Consideremos (4.180) junto con (4.190), (4.193), (4.201) y (4.202). □

Esta ecuación bilineal se puede escribir también como sigue

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{p_1}\varepsilon_{11}(p_1,a)\varepsilon'_{11}(p_1,a)\oint_{z=\infty} z^{\nu_{1,a}-\nu'_{1,a}-\delta_{a,p_1}-2}\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1}-\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}_2]}(t-[z^{-1}]_a)\tau^{(l+1)}_{\vec{\nu}'_1+\vec{e}_{1,a};\vec{\nu}'_2+\vec{e}_{2,p_2}}(t'+[z^{-1}]_a)E_a(z)dz\\ &=\sum_{b=1}^{p_2}\varepsilon_{22}(p_2,b)\varepsilon'_{22}(p_2,b)\oint_{z=\infty} z^{\nu'_{2,b}+\delta_{b,p_2}-\nu_{2,b}-2}\tau_{[\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1};\vec{\nu}_2+\vec{e}_{2,b}]}(t-\overline{[z^{-1}]}_b)\tau_{\vec{\nu}'_1;\vec{\nu}'_2+\vec{e}_{2,p_2}-\vec{e}_{2,b}]}(t'+\overline{[z^{-1}]}_b)\tilde{E}_b(z)dz.\end{aligned} \quad (4.204)$$

Que con la identificación $m^*=\vec{\nu}_1+\vec{e}_{1,p_1}$, $n^*=\vec{\nu}_2$, $m=\vec{\nu}'_1$ y $n=\vec{\nu}'_2+\vec{e}_{2,p_2}$, salvo signos, es la ecuación bilineal (41) de [7].

Capítulo 5

Polinomios de Laurent en el círculo unitario

El objetivo de este capítulo es explorar la conexión entre los sistemas integrables de tipo Toda y la ortogonalidad en el círculo unitario. Denotemos al círculo unitario por $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y por $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ al disco unitario. Llamaremos $\Lambda_{[p,q]} := \operatorname{span}\{z^{-p}, z^{-p+1}, \dots, z^q\}$ al espacio vectorial de los polinomios de Laurent complejos con las restricciones correspondientes en sus grados, mientras que $\Lambda_{[\infty]}$ indicará el espacio (de dimensión infinita) de todos los polinomios de Laurent. Cuando $z \in \mathbb{T}$ usaremos la parametrización $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.

Decimos que una medida compleja de Borel μ soportada en $\mathbb{T}$ es definida positiva si hace corresponder conjuntos medibles a números no negativos. Cuando la medida μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en el círculo $d\theta$, de acuerdo con el teorema Radon-Nikodym, se puede expresar siempre usando una función compleja w, de modo que $d\mu(\theta) = w(\theta)d\theta$. Si además la medida es definida positiva el peso debe ser una función no negativa en $\mathbb{T}$. Para simplificar la notación usaremos, cuando es conveniente la notación compleja $d\mu(z) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}d\mu(\theta)$. Si μ es una medida positiva de Borel soportada en $\mathbb{T}$, entonces los OPUC o polinomios de Szegő son polinomios mónicos P_n de grado menor o igual que n cuyos coeficientes satisfacen un sistema de ecuaciones lineales que se expresa mediante las llamadas relaciones de ortogonalidad,

$$\int_{\mathbb{T}} P_n(z) z^{-k} d\mu(z) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{5.1}$$

Recordamos también que las medidas y los funcionales lineales están íntimamente relacionados; dado un funcional lineal $\mathscr{L}$ en $\Lambda_{[\infty]}$ definimos sus correspondientes momentos como $c_n := \mathscr{L}[z^n]$ para todos los posibles valores enteros de $n \in \mathbb{Z}$. El funcional $\mathscr{L}$ se dice hermítico cuando $c_{-n} = \overline{c_n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Además decimos que el funcional $\mathscr{L}$ es cuasi-definido (definido positivo) cuando las submatrices principales de la matriz de momentos Toeplitz $(\Delta_{i,j})$, $\Delta_{i,j} := c_{i-j}$, asociada a la sucesión c_n son no singulares (definidas positivas), es decir $\forall n \in \mathbb{Z}, \Delta_n := \det(c_{i-j})_{i,j=0}^n \neq 0 (> 0)$. Algunos aspectos sobre funcionales cuasi-definidos y sus perturbaciones se pueden encontrar en [12, 27].

Es conocido [61] que cuando el funcional lineal $\mathscr{L}$ es hermítico y definido positivo existe una medida finita, positiva y de Borel soportada en $\mathbb{T}$ tal que $\mathscr{L}[f] = \int_{\mathbb{T}} f d\mu$, $\forall f \in \Lambda_{[\infty]}$. Además un funcional lineal definido positivo $\mathscr{L}$ define una forma sesquilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{L}} : \Lambda_{[\infty]} \times \Lambda_{[\infty]} \mapsto \mathbb{C}$ como $\langle f, g \rangle_{\mathscr{L}} = \mathscr{L}[f\bar{g}]$, $\forall f, g \in \Lambda_{[\infty]}$. Dos polinomios de Laurent $\{f, g\} \subset \Lambda_{[\infty]}$ decimos que son ortogonales respecto a $\mathscr{L}$ si $\langle f, g \rangle_{\mathscr{L}} = 0$. De las propiedades de $\mathscr{L}$ es fácil ver que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}$ es un producto escalar y si μ es la medida finita positiva de Borel asociada a $\mathscr{L}$ tenemos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T},\mu)$, el cierre de $\Lambda_{[\infty]}$. Como hemos mencionado antes $\{P_l\}_{l=0}^{\infty}$ indica el conjunto de polinomios ortogonales mónicos, para una una medida positiva μ que satisface (5.1) y por lo tanto $\{P_l\}_{l=0}^{q}$ es una base ortogonal del espacio de polinomios truncados $\Lambda_{[0,q]}$.

En este capítulo nos situamos en un contexto más general suponiendo que en general $\mathscr{L}$ está asociado a una medida compleja cuasi-definida μ (ver [59]). Igualmente se puede definir una forma sesquilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{L}}$ para dicho funcional lineal $\mathscr{L}$. En este caso solo tenemos las propiedades de linealidad (en la primera componente) y la antilinealidad (en la segunda componente), sin embargo, no tenemos una simetría que permita el intercambio de los dos argumentos. Ampliamos formalmente la noción de ortogonalidad y decimos que f es ortogonal a g si $\langle f,g\rangle_{\mathscr{L}}=0$, pero en esta situación general puede ocurrir que $\langle f,g\rangle_{\mathscr{L}}=0$ pero $\langle g,f\rangle_{\mathscr{L}}\neq 0$. La similitud de las relaciones de simetría que verifican las matrices de momentos de un problema de ortogonalidad múltiple con las que verifica un problema de ortogonalidad Laurent en el círculo permiten que las técnicas desarrolladas en el capítulo 4 se apliquen en este caso y se puedan obtener, tanto resultados conocidos mediante técnicas más algorítmicas, como nuevos resultados.

Comentamos en la introducción que una de las complicaciones de los polinomios ortogonales en el círculo unitario es su tipo de recurrencia. De modo más preciso, el estudio de las relaciones de recurrencia para los OPUC requiere la definición de los polinomios recíprocos de Szegő $P_l^*(z):=z^l\overline{P_l(\bar{z}^{-1})}$ (en el círculo se cumple que $P_l^*(z)=z^l\bar{P}_l(z^{-1})$, que usaremos habitualmente) y los coeficientes de reflexión o coeficientes de Verblunsky[1] $\alpha_l:=P_l(0)$. Con estos elementos las fórmulas de recurrencia para los polinomios de Szegő se pueden escribir usando matrices 2×2

$$\begin{pmatrix} P_l \\ P_l^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \alpha_l \\ z\bar{\alpha}_l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{l-1} \\ P_{l-1}^* \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Un segundo problema importante es que en general el conjunto de los polinomios de Szegő no es en general denso en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T},\mu)$. Se sigue del teorema de Szegő que para una medida de probabilidad no trivial (con un soporte que conste de un número infinito de puntos) con coeficientes de Verblunsky $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ los polinomios de Szegő son densos en $L^2(\mathbb{T},\mu)$ si y solo si $\prod_{n=0}^{\infty}(1-|\alpha_n|^2)=0$. Si $d\mu$ es una medida de probabilidad absolutamente continua entonces el teorema de densidad de Kolmogorov caracteriza la situación: los polinomios son densos en $L^2(\mathbb{T},\mu)$ si y solo si se satisface la llamada condición de Szegő $\int_{\mathbb{T}}\log(w(\theta))d\theta=-\infty$ [111].

Como veremos más adelante, la representación CMV aporta una buena conexión entre las técnicas de factorización usadas en el capítulo 4 (y [9]) y el caso circular. Muchos de los resultados obtenidos en el capítulo anterior sobre fórmulas de Christoffel-Darboux, deformaciones continuas y discretas, y expresiones ligadas a la función τ se pueden extender al caso circular con la elección adecuada de la matriz de momentos y de los operadores de traslación.

El esquema de este capítulo es el que sigue. En la sección 5.1 empleamos la factorización de Gauss de una matriz de momentos de tipo CMV para la construcción de polinomios de Laurent ortogonales en el círculo (OLPUC), las funciones de segunda especie, las leyes de recurrencia y la fórmula de Christoffel-Darboux. En la sección 5.2 realizamos un trabajo similar con una ordenación un poco más general que la CMV estándar empleada en [29]. Esto permite estudiar matrices de Jacobi de estructura más compleja (las llamadas matrices con forma de “serpiente”,

[1]También es habitual llamarlos parámetros de Schur. La definición no es única y $\alpha_l:=-\overline{P_{l+1}(0)}$ es otra definición común.

[35]), y relaciones de recurrencia más largas. Además, la fórmula de Christoffel-Darboux que obtenemos en este caso extendido corresponde al núcleo integral de un operador de proyección sobre el espacio de polinomios de Laurent, $\Lambda_{[p,q]} = \mathbb{C}\{z^{-p}, \dots, z^q\}$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Esta es una generalización de la situación CMV ya que en ella el espacio de polinomios truncados es muy particular, de hecho $\Lambda_{[l,l]}$ o $\Lambda_{[l+1,l]}$ con $l \in \mathbb{N}$. Para terminar, en la sección 5.3 estudiamos como las deformaciones adecuadas de las matrices de momentos permiten obtener una jerarquía integrable de ecuaciones asociada y representar estos objetos (los OLPUC y sus funciones de segunda especie) empleando funciones τ e identidades bilineales.

5.1. Factorización LU y ordenación CMV

En esta sección utilizamos la factorización gaussiana de la matriz de momentos adecuada para obtener una familia de polinomios de Laurent bi-ortogonales en el círculo para una medida μ. La idea principal es utilizar la representación CMV [29] y aplicar la metodología y técnicas empleadas en el capítulo 4 para obtener resultados similares a los obtenidos en la recta real.

5.1.1. Polinomios de Laurent bi-ortogonales

El primer paso será usar una matriz de tipo CMV para encontrar un conjunto de polinomios de Laurent bi-ortogonales, su conexión con los polinomios clásicos de Szegő y sus expresiones en forma de determinantes. Para este objetivo fijamos en primer lugar el orden CMV de la base de Fourier $\{z^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Esta ordenación nos permite trabajar en el marco de las matrices semi-infinitas, evitando el caso doblemente infinito. Esto nos permite proceder de forma similar a la situación que se daba en la recta real en el capítulo 4.

Definición 5.1. Definimos las siguientes sucesiones de monomios

$$\chi_1(z) := (1, 0, z, 0, z^2, 0, \dots)^\top, \quad \chi_2(z) := (0, 1, 0, z, 0, z^2, \dots)^\top, \quad \chi_a^*(z) := z^{-1}\chi_a(z^{-1}), \quad a = 1, 2.$$

$$\chi(z) := \chi_1(z) + \chi_2^*(z) = (1, z^{-1}, z, z^{-2}, \dots)^\top, \quad \chi^*(z) := \chi_1^*(z) + \chi_2(z) = (z^{-1}, 1, z^{-2}, z, \dots)^\top.$$

Dadas estas sucesiones y dada una medida de Borel cuasi-definida μ soportada en $\mathbb{T}$ definimos la matriz de momentos CMV.

Definición 5.2. La matriz de momentos CMV g es la siguiente matriz semi-infinita con valores complejos

$$g := \oint_{\mathbb{T}} \chi(z)\chi(z)^\dagger d\mu(z). \tag{5.3}$$

De la definición se deduce que si μ es una medida positiva, entonces g es por construcción una matriz hermítica. La factorización usual LU para este caso es

$$g = S^{-1}\tilde{S}, \tag{5.4}$$

donde S es una matriz triangular inferior normalizada y $\tilde{S}$ es una matriz triangular superior. Como es habitual, esta factorización tiene sentido si todos los menores principales son no singulares, que es precisamente la definición que hemos dado para una medida cuasi-definida.

Con la ayuda de estas matrices consideramos las sucesiones

$$\Phi_{1,1} := S\chi_1, \qquad \Phi_{1,2} := S\chi_2^*, \qquad \Phi_{2,1} := (\tilde{S}^{-1})^\dagger\chi_1, \qquad \Phi_{2,2} := (\tilde{S}^{-1})^\dagger\chi_2^*, \tag{5.5}$$

que se pueden escribir como vectores semi-infinitos

$$\Phi_{1,a}(z) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,a}^{(0)}(z) \\ \varphi_{1,a}^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{2,a}(z) = \begin{pmatrix} \varphi_{2,a}^{(0)}(z) \\ \varphi_{2,a}^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

para $a = 1, 2$.

Los correspondientes componentes $\varphi_{1,1}^{(l)}$ y $\varphi_{2,1}^{(l)}$ son polinomios de grado l en la variable z, mientras que los otros dos son polinomios de grado $l+1$ en la variable z^{-1} que se anulan en $z = \infty$.

Siguiendo la linea del capítulo 4 definimos las sucesiones de polinomios de Laurent

$$\Phi_1(z) : = S\chi(z) = \Phi_{1,1} + \Phi_{1,2}, \qquad \Phi_2(z) : = (\tilde{S}^{-1})^\dagger\chi(z) = \Phi_{2,1} + \Phi_{2,2}, \tag{5.7}$$

que son vectores semi-infinitos y los podemos escribir de la forma

$$\Phi_1(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(0)}(z) \\ \varphi_1^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \Phi_2(z) = \begin{pmatrix} \varphi_2^{(0)}(z) \\ \varphi_2^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

tales que sus coeficientes son polinomios de Laurent.

La medida μ tiene asociada una forma sesquilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{L}}$ que actúa sobre cualquier par de polinomios de Laurent en $\mathbb{T}$, $\varphi_1(z)$ y $\varphi_2(z)$

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\mathscr{L}} := \oint_{\mathbb{T}} \varphi_1(z)\bar{\varphi}_2(z^{-1})d\mu(z). \tag{5.9}$$

De la definición está claro que g (cuyos menores principales no se anulan) es la matriz asociada a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{L}}$. Los menores principales de g son los menores Toeplitz Δ_n (una matriz se obtiene de la otra mediante permutaciones). Como en este capítulo vamos a usar medidas al menos cuasi-definidas, siempre se verificará la condición necesaria para poder realizar la factorización.

Dados dos espacios vectoriales V, V' y una forma sesquilineal

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{L}} : & V \times V' & \mapsto & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle_{\mathscr{L}} \end{array}$$

decimos que los conjuntos $X \subset V$ y $Y \subset V'$ son bi-ortogonales si $\langle x,y\rangle_{\mathscr{L}} = 0$ para todo $(x,y) \in X \times Y$.

Teorema 5.3. *Los conjuntos de polinomios ortogonales* $\{\varphi_1^{(l)}\}_{l=0}^\infty$ *y* $\{\varphi_2^{(l)}\}_{l=0}^\infty$ *son bi-ortogonales en el círculo con respecto a la forma sesquilineal definida en* (5.9)*, es decir*

$$\langle\varphi_1^{(l)}, \varphi_2^{(k)}\rangle_{\mathscr{L}} = \oint_{\mathbb{T}} \varphi_1^{(l)}(z)\bar{\varphi}_2^{(k)}(z^{-1})d\mu(z) = \delta_{l,k} \qquad l,k = 0,1,\dots \tag{5.10}$$

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbb{T}} \Phi_1(z)\bar{\Phi}_2(z^{-1})^\top d\mu(z) &= \oint_{\mathbb{T}} \Phi_1(z)\Phi_2(z)^\dagger d\mu(z)\\ &= S\Big[\oint_{\mathbb{T}} \chi(z)\chi(z)^\dagger d\mu(z)\Big]\tilde{S}^{-1}\\ &= \mathbb{I}.\end{aligned}$$

□

Las relaciones de ortogonalidad (5.10) se pueden expresar de forma alternativa como sigue

$$\begin{aligned}\langle \varphi_1^{(2l)}, z^k\rangle_{\mathscr{L}} &= \oint_{\mathbb{T}} \varphi_1^{(2l)}(z) z^{-k} d\mu(z) = 0, & k &= -l,\dots,l-1,\\ \langle \varphi_1^{(2l+1)}, z^k\rangle_{\mathscr{L}} &= \oint_{\mathbb{T}} \varphi_1^{(2l+1)}(z) z^{-k} d\mu(z) = 0, & k &= -l,\dots,l,\\ \langle z^k, \varphi_2^{(2l)}\rangle_{\mathscr{L}} &= \oint_{\mathbb{T}} \bar{\varphi}_2^{(2l)}(z^{-1}) z^{k} d\mu(z) = 0, & k &= -l,\dots,l-1,\\ \langle z^k, \varphi_2^{(2l+1)}\rangle_{\mathscr{L}} &= \oint_{\mathbb{T}} \bar{\varphi}_2^{(2l+1)}(z^{-1}) z^{k} d\mu(z) = 0, & k &= -l,\dots,l.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Proposición 5.4. *Dada una medida positiva de Borel μ existe $h_l \in \mathbb{R}$, $l = 0, 1, \dots,$ tal que*

$$\varphi_2^{(l)} = h_l^{-1}\varphi_1^{(l)}.$$

Demostración. En este caso g es definida positiva y hermítica, si escribimos $\tilde{S} = h\hat{S}$, donde $h = \operatorname{diag}(h_0, h_1, \dots)$ es una matriz diagonal y

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & (\hat{S})_{01} & (\hat{S})_{02} & \dots\\ 0 & 1 & (\hat{S})_{12} & \dots\\ 0 & 0 & 1 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

la unicidad de la factorización implica que $\hat{S} = (S^{-1})^\dagger$ y $h_l \in \mathbb{R}$, de donde obtenemos el resultado deseado. □

Las dos familias de polinomios de Laurent son proporcionales. Este hecho, unido a la biortogonalidad expresada en (5.10) implica que $\{\varphi_1^{(l)}\}_{l=0}^\infty$ y $\{\varphi_2^{(l)}\}_{l=0}^\infty$ son conjuntos de polinomios de Laurent ortogonales para la medida positiva μ, es decir

$$\begin{aligned}\langle \varphi_1^{(l)}, \varphi_1^{(k)}\rangle_{\mathscr{L}} &= \oint_{\mathbb{T}} \varphi_1^{(l)}(z)\bar{\varphi}_1^{(k)}(z^{-1}) d\mu(z) = \delta_{l,k} h_l & l,k &= 0,1,\dots\\ \langle \varphi_2^{(l)}, \varphi_2^{(k)}\rangle_{\mathscr{L}} &= \oint_{\mathbb{T}} \varphi_2^{(l)}(z)\bar{\varphi}_2^{(k)}(z^{-1}) d\mu(z) = \delta_{l,k} h_l^{-1} & l,k &= 0,1,\dots\end{aligned} \tag{5.12}$$

Como ya se comentaba en [29], hay una correspondencia biunívoca entre este conjunto de polinomios múltiplemente ortogonales y el conjunto de los polinomios de Szegő $\{P_l\}$.

Proposición 5.5. *Si la medida μ es definida positiva podemos identificar los polinomios de Laurent CMV, los polinomios de Szegő y sus recíprocos.*

$$\varphi_1^{(2l)}(z) = z^{-l} P_{2l}(z), \quad \varphi_1^{(2l+1)}(z) = z^{-l-1} P_{2l+1}^*(z). \tag{5.13}$$

Demostración. Simplemente hay que observar que

$$\oint_{\mathbb{T}} z^l \varphi_1^{(2l)}(z) z^{-k} d\mu(z) = 0, \qquad k = 0, \dots, 2l-1.$$

Por lo tanto, $z^l \varphi_1^{(2l)}(z)$ tiene las mismas relaciones de ortogonalidad que $P_{2l}(z)$ y ambos son polinomios mónicos de grado $2l$; la unicidad lleva directamente a su identificación.

De forma similar realizamos el procedimiento para los polinomios impares. De hecho,

$$\oint_{\mathbb{T}} z^{l+1} \varphi_1^{(2l+1)}(z) z^{-k} d\mu(z) = 0, \qquad k = 1, \dots, 2l+1,$$

es decir, $z^{l+1}\varphi_1^{(2l+1)}(z)$ tiene las mismas relaciones de ortogonalidad que el polinomio $P_{2l+1}^*(z)$ (lo que hace que sean proporcionales) y además ambos toman el valor 1 en $z = 0$, consecuentemente son iguales. □

Usando los coeficientes de Verblunsky podemos escribir

$$\varphi_1^{(2l)}(z) = \alpha_{2l} z^{-l} + \cdots + z^l,$$
$$\varphi_1^{(2l+1)}(z) = z^{-l-1} + \cdots + \bar{\alpha}_{2l+1} z^l.$$

Para su uso posterior, y de forma adicional a los coeficientes de reflexión, también es útil definir la sucesión de números reales $\rho_l := \sqrt{1 - |\alpha_l|^2}$, que está relacionada con $\{h_l\}_{l=0}^{\infty}$ por

$$\rho_l^2 = \frac{h_l}{h_{l-1}}, \tag{5.14}$$

válida para $l > 0$, con $\rho_0 = 0$.

En el caso general cuasi-definido, podemos hacer una construcción similar. Escribimos

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(2l)}(z) &= \alpha_{2l}^{(1)} z^{-l} + \cdots + z^l, \\ \varphi_1^{(2l+1)}(z) &= z^{-l-1} + \cdots + \bar{\alpha}_{2l+1}^{(2)} z^l, \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(2l)}(z) &= \bar{h}_{2l}^{-1} \alpha_{2l}^{(2)} z^{-l} + \cdots + \bar{h}_{2l}^{-1} z^l, \\ \varphi_2^{(2l+1)}(z) &= \bar{h}_{2l+1}^{-1} z^{-l-1} + \cdots + \bar{h}_{2l+1}^{-1} \bar{\alpha}_{2l+1}^{(1)} z^l, \end{aligned} \tag{5.16}$$

y también $\rho_0^2 := 0, \rho_l^2 := \frac{h_l}{h_{l-1}}, l = 1, 2, \dots$. De hecho el caso hermítico se puede considerar una reducción particular en la que $\alpha_l^{(2)} = \alpha_l^{(1)}$.

La razón de la elección de la notación descansa en el siguiente hecho. Dada una medida cuasi-definida μ podemos encontrar dos familias de polinomios mónicos tales que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} P_l^{(1)}(z) z^{-k} d\mu(z) &= 0 \quad k = 0, 1, \dots, l-1, \\ \int_{\mathbb{T}} z^k \bar{P}_l^{(2)}(z^{-1}) d\mu(z) &= 0 \quad k = 0, 1, \dots, l-1. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Si llamamos $\alpha_l^{(1)} = P_l^{(1)}(0)$, y $\alpha_l^{(2)} = P_l^{(2)}(0)$ entonces estos coeficientes están relacionados con los polinomios de Laurent y podemos obtener la versión en el caso cuasi-definido de la proposición 5.5, que es

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(2l)}(z) &= z^{-l} P_{2l}^{(1)}(z), & \varphi_1^{(2l+1)}(z) &= z^{-l-1} P_{2l+1}^{(2)*}(z), \\ \varphi_2^{(2l)}(z) &= \bar{h}_{2l}^{-1} z^{-l} P_{2l}^{(2)}(z), & \varphi_2^{(2l+1)}(z) &= \bar{h}_{2l+1}^{-1} z^{-l-1} P_{2l+1}^{(1)*}(z). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Con idéntica notación a la del capítulo 4 e idéntica demostración obtenemos el análogo de la proposición 4.11, que recoge diversas formas de expresar los polinomios de Laurent y sus duales a través de la matriz truncada de momentos y sus determinantes

Proposición 5.6. *Se verifican las siguientes expresiones para los polinomios* $\varphi_1^{(l)}(z)$

$$\varphi_1^{(l)}(z) = \chi^{(l)} - \begin{pmatrix} g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} \end{pmatrix} (g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]} \tag{5.19}$$

$$= \tilde{S}_{ll} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} (g^{[l+1]})^{-1}\chi^{[l+1]} \tag{5.20}$$

$$= \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \chi^{(0)}(z) \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \chi^{(1)}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} & \chi^{(l)}(z) \end{array}\right), \qquad l \geq 1, \tag{5.21}$$

y las siguientes expresiones para los conjugados de sus duales $\varphi_2^{(l)}(z)$

$$\bar{\varphi}_2^{(l)}(\bar{z}) = \tilde{S}_{ll}^{-1}\Big((\chi^{(l)})^{\dagger} - (\chi^{[l]})^{\dagger}(g^{[l]})^{-1} \begin{pmatrix} g_{0,l} \\ g_{1,l} \\ \vdots \\ g_{l-1,l} \end{pmatrix}\Big) \tag{5.22}$$

$$= (\chi^{[l+1]})^{\dagger}(g^{[l+1]})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

$$= \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \det \left(\begin{array}{cccc} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l} \\ \hline \overline{\chi^{(0)}(z)} & \overline{\chi^{(1)}(z)} & \dots & \overline{\chi^{(l)}(z)} \end{array}\right), \qquad l \geq 1. \tag{5.24}$$

Existen expresiones similares para $\varphi_{a,1}^{(l)}$ reemplazando χ por χ_1, $a = 1, 2$, y para $\varphi_{a,2}^{(l)}$ reemplazando χ por χ_2^*, $a = 1, 2$.

5.1.2. Funciones de segunda especie

El siguiente paso natural es definir las funciones de segunda especie asociadas a los polinomios de Laurent ortogonales en el círculo. Para ello construimos primero las expresiones que utilizan determinantes y a continuación estudiamos su conexión con las series de Fourier de la medida y con las trasformadas de Cauchy y de Caratheorody.

Definición 5.7. Las sucesiones parciales de segunda especie son

$$C_1(z) := (S^{-1})^{\dagger}\chi_1^*(z), \quad C_2(z) := (S^{-1})^{\dagger}\chi_2(z), \quad \tilde{C}_1(z) := \tilde{S}\chi_1^*(z), \quad \tilde{C}_2(z) := \tilde{S}\chi_2(z). \tag{5.25}$$

y las sucesiones de segunda especie están definidas como

$$C(z) := (S^{-1})^{\dagger}\chi^*(z), \qquad \tilde{C}(z) := \tilde{S}\chi^*(z), \tag{5.26}$$

De la definición tenemos que

$$C = C_1 + C_2, \qquad \tilde{C}_2 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2, \tag{5.27}$$

donde los coeficientes de estos vectores semi-infinitos son las funciones de segunda especie asociadas al problema

$$C_a(z) := \begin{pmatrix} C_a^{(0)}(z) \\ C_a^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_a(z) := \begin{pmatrix} \tilde{C}_a^{(0)}(z) \\ \tilde{C}_a^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad C(z) := \begin{pmatrix} C^{(0)}(z) \\ C^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}(z) := \begin{pmatrix} \tilde{C}^{(0)}(z) \\ \tilde{C}^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Las expresiones dadas para estas funciones de segunda especie son en principio puramente formales, ya que de nuevo los productos de matrices conducen a series que no necesariamente convergen, en vez de a sumas finitas. A pesar de eso (como se mostrará en la proposición 5.10) estas series están bien definidas en términos de los polinomios de Laurent y las series truncadas de Fourier de la medida, que veremos que son convergentes en una determinada corona circular centrada en el origen.

Se pueden encontrar expresiones que emplean determinantes similares a las de los polinomios dadas en la proposición 5.6. En concreto, si definimos

$$\Gamma_j^{(l)} := \sum_{k\geq l} g_{jk}\chi^{*(k)}, \qquad \tilde{\Gamma}_j^{(l)} := \sum_{k\geq l} g_{jk}^{\dagger}\chi^{*(k)}. \tag{5.28}$$

tenemos la siguiente proposición

Proposición 5.8. *Las funciones de segunda especie tienen las siguientes expresiones en forma de determinantes para $l \geq 1$*

$$\overline{C^{(l)}(z)} = \frac{1}{\det g^{[l+1]}} \det \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l} \\ \hline \overline{\tilde{\Gamma}_0^{(l)}(z)} & \overline{\tilde{\Gamma}_1^{(l)}(z)} & \dots & \overline{\tilde{\Gamma}_l^{(l)}(z)} \end{pmatrix}, \tag{5.29}$$

y

$$\tilde{C}^{(l)}(z) = \frac{1}{\det g^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \Gamma_0^{(l)}(z) \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \Gamma_1^{(l)}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1} & \Gamma_l^{(l)}(z) \end{array}\right). \tag{5.30}$$

Demostración. Idéntica a la de la proposición 4.17. □

Ahora introducimos la siguiente definición,

Definición 5.9. 1. Para los polinomios bi-ortogonales de Laurent $\varphi_1^{(l)}$ y $\varphi_2^{(l)}$ usaremos la notación $\varphi_2^{(l)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) = \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{2,k}^{(l)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}$ y $\varphi_1^{(l)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) = \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{1,k}^{(l)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}$,

2. Sean

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\theta}\, d\mu(\theta), \qquad\qquad F_\mu(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u^n,$$

los coeficientes de Fourier y la serie de Fourier de la medida μ.

3. Para cada entero k se definen las siguientes series de Fourier truncadas

$$F^{(+)}_{\mu,k}(z) := \sum_{n\geq -k} c_n z^n, \qquad\qquad F^{(-)}_{\mu,k}(z) := \sum_{n<-k} c_n z^n.$$

Observaciones

1. Se cumple que $c_n(\bar{\mu}) = \overline{c_{-n}(\mu)}$, y por lo tanto $\overline{c_{-n}} = c_n$ para medidas reales. Consecuentemente,

$$F^{(+)}_{\bar{\mu},k}(z) = \bar{F}^{(-)}_{\mu,-k-1}(z^{-1}), \qquad F^{(-)}_{\bar{\mu},k}(z) = \bar{F}^{(+)}_{\mu,-k-1}(z^{-1}), \qquad F_{\bar{\mu}}(z) = \bar{F}_\mu(z^{-1}).$$

2. Las series de Fourier siempre convergen en $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$, el espacio de distribuciones en el círculo. De este modo $\int_0^{2\pi} F_\mu(\theta) f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\mu(\theta)$, $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$, aquí $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ indica el espacio de funciones prueba en el círculo. Para una medida absolutamente continua $d\mu(\theta) = w(\theta)d\theta$ y podemos escribir $d\mu(\theta) = F_\mu(\theta)d\theta$.

3. Podemos también considerar la serie de Laurent $F_\mu(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, para $z \in \mathbb{C}$. Entonces tenemos que $F^{(+)}_{\mu,k} + F^{(-)}_{\mu,k} = F_\mu$.

4. Sea $D(0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ una corona centrada $z = 0$ con radios interior y exterior r y R y $R_\pm := (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{\pm n}|})^{\mp 1}$. De acuerdo con el criterio estándar de la raíz para la convergencia de series tenemos que

   - La serie $F^{(+)}_{\mu,k}(z)$ converge uniformemente en cualquier compacto K, $K \subset D(0; 0, R_+)$.
   - La serie $F^{(-)}_{\mu,k}(z)$ converge uniformemente en cualquier compacto K, $K \subset D(0; R_-, \infty)$.
   - La serie $F_\mu(z)$ converge uniformemente en cualquier compacto K, $K \subset D(0; R_-, R_+)$.

5. Según el teorema de F. y M. Riesz si $c_n = 0$, $n < 0$, entonces μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}$, [100],[102].

Proposición 5.10. *Las funciones parciales de segunda especie se pueden expresar como*

$$\begin{aligned}
C^{(l)}_1 &= 2\pi \sum_{|k|\ll\infty} \varphi^{(l)}_{2,k} z^{-k-1} \bar{F}^{(-)}_{\mu,-k-1}(z), & R_- < |z| < \infty,\\
C^{(l)}_2 &= 2\pi \sum_{|k|\ll\infty} \varphi^{(l)}_{2,k} z^{-k-1} \bar{F}^{(+)}_{\mu,-k-1}(z), & 0 < |z| < R_+,\\
\tilde{C}^{(l)}_1 &= 2\pi \sum_{|k|\ll\infty} \varphi^{(l)}_{1,k} z^{-k-1} F^{(+)}_{\mu,k}(z^{-1}), & R_+^{-1} < |z| < \infty,\\
\tilde{C}^{(l)}_2 &= 2\pi \sum_{|k|\ll\infty} \varphi^{(l)}_{1,k} z^{-k-1} F^{(-)}_{\mu,k}(z^{-1}), & 0 < |z| < R_-^{-1},
\end{aligned}$$

y las funciones de segunda especie como

$$\begin{aligned} C^{(l)} &= 2\pi\varphi_2^{(l)}(z^{-1})z^{-1}\bar{F}_\mu(z), & R_- < |z| < R_+, \\ \tilde{C}^{(l)} &= 2\pi\varphi_1^{(l)}(z^{-1})z^{-1}F_\mu(z^{-1}), & R_+^{-1} < |z| < R_-^{-1}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Demostración. Con la definición formal de C_a y $\tilde{C}_a$, $a = 1, 2$, y la ayuda de la factorización gaussiana de la matriz de momentos g, tenemos que

$$\begin{aligned} C_1 &= (\tilde{S}^{-1})^\dagger \oint_{\mathbb{T}} \chi(u)\chi(u)^\dagger \overline{d\mu(u)}\chi_1^*(z), & C_2 &= (\tilde{S}^{-1})^\dagger \oint_{\mathbb{T}} \chi(u)\chi(u)^\dagger \overline{d\mu(u)}\chi_2(z), \\ \tilde{C}_1 &= S \oint_{\mathbb{T}} \chi(u)\chi(u)^\dagger d\mu(u)\chi_1^*(z), & \tilde{C}_2 &= S \oint_{\mathbb{T}} \chi(u)\chi(u)^\dagger d\mu(u)\chi_2(z). \end{aligned}$$

Recordamos que $((\tilde{S}^{-1})^\dagger\chi(u))^{(l)} = \varphi_2^{(l)}(u)$ y $(S\chi(u))^{(l)} = \varphi_1^{(l)}(u)$ y desarrollamos los productos que aparecen, sin intercambiar integrales con sumas infinitas

$$\begin{aligned} C_1^{(l)} &= \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{2,k}^{(l)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}\, d\bar{\mu}(\theta)\Big]z^{-n-1}\Big), \\ C_2^{(l)} &= \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{2,k}^{(l)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+n+1)\theta}\, d\bar{\mu}(\theta)\Big]z^{n}\Big) \\ \tilde{C}_1^{(l)} &= \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{1,k}^{(l)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}\, d\mu(\theta)\Big]z^{-n-1}\Big), \\ \tilde{C}_2^{(l)} &= \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{1,k}^{(l)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+n+1)\theta}\, d\mu(\theta)\Big]z^{n}\Big). \end{aligned}$$

Usando los coeficientes de Fourier c_n escribimos

$$\begin{aligned} C_1^{(l)} &= 2\pi\sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{2,k}^{(l)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_{k-n}}z^{-n-1}\Big), & C_2^{(l)} &= 2\pi\sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{2,k}^{(l)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_{k+n+1}}z^{n}\Big), \\ \tilde{C}_1^{(l)} &= 2\pi\sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{1,k}^{(l)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-k}z^{-n-1}\Big), & \tilde{C}_2^{(l)} &= 2\pi\sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{1,k}^{(l)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}c_{-k-n-1}z^{n}\Big), \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado deseado. □

Proposición 5.11. *Las series formales para $\Gamma_j^{(l)}(z)$ y $\tilde{\Gamma}_j^{(l)}(z)$ definidas en 5.28 se puede expresar en términos de la serie de Fourier de μ y consecuentemente son convergentes en la corona correspondiente del plano complejo. De modo más preciso*

$$\begin{aligned} \Gamma_j^{(l)}(z) &= 2\pi z^{-J(j)-1}\Big(F_{J(j)-l,\mu}^{(+)}(z^{-1}) + F_{J(j)+l,\mu}^{(-)}(z^{-1})\Big), & R_+^{-1} < |z| < R_-^{-1}, \\ \tilde{\Gamma}_j^{(l)}(z) &= 2\pi z^{-J(j)-1}\Big(\bar{F}_{l-J(j)-1,\mu}^{(-)}(z) + \bar{F}_{-l-J(j)-1,\mu}^{(+)}(z)\Big), & R_- < |z| < R_+, \end{aligned}$$

donde $J(j) = [(-1)^{a(j)-1}\frac{j}{2}]$. Además la definición de J está construida para que $z^{J(j)} = \chi^{(j)}(z)$.

Demostración. Usando los coeficientes de Fourier de la medida y la definición de los coeficientes

$\Gamma_j^{(l)}$ y $\tilde{\Gamma}_j^{(l)}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_j^{(0)}(z) &= \sum_{k\geq 0} g_{j,k}\chi^{*(k)}(z) = \sum_{k\geq 0} g_{j,k}\chi_1^{*(k)}(z) + \sum_{k\geq 0} g_{j,k}\chi_2^{(k)}(z) \\
&= \sum_{k\geq 0}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(J(j)-k)\theta}d\mu(\theta)z^{-k-1} + \sum_{k\geq 0}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(J(j)+k+1)\theta}d\mu(\theta)z^k \\
&= 2\pi\sum_{k\geq 0}(c_{k-J(j)}z^{-k-1} + c_{-k-J(j)-1}z^k) \\
&= 2\pi z^{-J(j)-1}\Big(\sum_{k\geq -J(j)} c_k(z^{-1})^k + \sum_{k<-J(j)} c_k(z^{-1})^k\Big) \\
&= 2\pi z^{-J(j)-1}F_\mu(z^{-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_j^{(0)}(z) &= \sum_{k\geq 0} g^\dagger_{j,k}\chi^{*(k)}(z) = \sum_{k\geq 0} g^\dagger_{j,k}\chi_1^{*(k)}(z) + \sum_{k\geq 0} g^\dagger_{j,k}\chi_2^{(k)}(z) \\
&= \sum_{k\geq 0}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(J(j)-k)\theta}d\bar{\mu}(\theta)z^{-k-1} + \sum_{k\geq 0}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(J(j)+k+1)\theta}d\bar{\mu}(\theta)z^k \\
&= 2\pi\sum_{k\geq 0}(\overline{c_{J(j)-k}}z^{-k-1} + \overline{c_{k+J(j)+1}}z^k) \\
&= 2\pi z^{-J(j)-1}\Big(\sum_{k<J(j)+1} \overline{c_k}z^k + \sum_{k\geq J(j)+1} \overline{c_k}z^k\Big) \\
&= 2\pi z^{-J(j)-1}\bar{F}_\mu(z).
\end{aligned}$$

A partir de ahí obtenemos el resto de las expresiones

$$\begin{aligned}
\Gamma_j^{(l)}(z) &= 2\pi z^{-J(j)-1}(\sum_{k\geq -J(j)+l} c_k(z^{-1})^k + \sum_{k<-J(j)-l} c_k(z^{-1})^k) = 2\pi z^{-J(j)-1}\Big(F^{(+)}_{J(j)-l,\mu}(z^{-1}) + F^{(-)}_{J(j)+l,\mu}(z^{-1})\Big), \\
\tilde{\Gamma}_j^{(l)}(z) &= 2\pi z^{-J(j)-1}\Big(\sum_{k<J(j)+1-l} \overline{c_k}z^k + \sum_{k\geq J(j)+1+l} \overline{c_k}z^k\Big) = 2\pi z^{-J(j)-1}\Big(\bar{F}^{(-)}_{l-J(j)-1,\mu}(z) + \bar{F}^{(+)}_{-l-J(j)-1,\mu}(z)\Big).
\end{aligned}$$

□

Para $l=0$ tenemos

$$\Gamma_j^{(0)}(z) = 2\pi z^{-J(j)-1}F_\mu(z^{-1}), \qquad R_+^{-1} < |z| < R_-^{-1}, \tag{5.32}$$

$$\tilde{\Gamma}_j^{(0)}(z) = 2\pi z^{-J(j)-1}\bar{F}_\mu(z), \qquad R_- < |z| < R_+. \tag{5.33}$$

Ahora justificamos el nombre dado a estas funciones y hallamos una representación para ellas en forma de transformadas de Cauchy. Lo probaremos bajo dos conjuntos de hipótesis sobre la medida. En primer lugar utilizando técnicas de teoría de la medida, suponiendo que μ es positiva y utilizando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. En segundo lugar empleamos técnicas de variable compleja, considerando medidas complejas absolutamente continuas $d\mu = w(\theta)d\theta$ donde w es una función compleja continua.

Teorema 5.12. *Supongamos una medida positiva $d\mu(\theta)$ o una medida compleja $d\mu(\theta) = w(\theta)d\theta$ con w una función continua. Entonces, las funciones de segunda especie se pueden escribir como* *las siguientes integrales de tipo Cauchy*

$$
\begin{aligned}
C_1^{(l)}(z) &= z^{-1}\oint_{\mathbb{T}} \frac{u\varphi_2^{(l)}(u)}{u-z^{-1}}\overline{d\mu(u)}, &\qquad \tilde{C}_1^{(l)}(z) &= z^{-1}\oint_{\mathbb{T}} \frac{u\varphi_1^{(l)}(u)}{u-z^{-1}}d\mu(u), &\qquad |z|>1,\\
C_2^{(l)}(z) &= -z^{-1}\oint_{\mathbb{T}} \frac{u\varphi_2^{(l)}(u)}{u-z^{-1}}\overline{d\mu(u)}, &\qquad \tilde{C}_2^{(l)}(z) &= -z^{-1}\oint_{\mathbb{T}} \frac{u\varphi_1^{(l)}(u)}{u-z^{-1}}d\mu(u), &\qquad |z|<1.
\end{aligned}
$$

Demostración. De la definición de C_a, $\tilde{C}_a$ y la factorización gaussiana de la matriz de momentos g, $(S^{-1})^\dagger = (\tilde{S}^{-1})^\dagger g^\dagger$ o $\tilde{S} = Sg$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
C_1(z) &= (\tilde{S}^{-1})^\dagger \oint_{\mathbb{T}} \chi(u)\chi(u)^\dagger\overline{d\mu(u)}\chi_1^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\oint_{\mathbb{T}}\Phi_2(u)u^{-n}z^{-n-1}\overline{d\mu(u)}\Big),\\
C_2(z) &= (\tilde{S}^{-1})^\dagger \oint_{\mathbb{T}} \chi(u)\chi(u)^\dagger\overline{d\mu(u)}\chi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\oint_{\mathbb{T}}\Phi_2(u)u^{n+1}z^{n}\overline{d\mu(u)}\Big),\\
\tilde{C}_1(z) &= S \oint_{\mathbb{T}} \chi(u)\chi(u)^\dagger d\mu(u)\chi_1^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\oint_{\mathbb{T}}\Phi_1(u)u^{-n}z^{-n-1}d\mu(u)\Big),\\
\tilde{C}_2(z) &= S \oint_{\mathbb{T}} \chi(u)\chi(u)^\dagger d\mu(u)\chi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\oint_{\mathbb{T}}\Phi_1(u)u^{n+1}z^{n}d\mu(u)\Big).
\end{aligned}
$$

Para las series en estas expresiones tenemos que:

1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n}z^{-n-1}$ converge uniformemente en la variable u en cualquier compacto $K\subset\{u\in\mathbb{C}:|u|>|z|^{-1}\}$ a $(z-u^{-1})^{-1}$ y si $|z|>1$ podemos elegir K tal que $\mathbb{T}\subset K$.

2. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} u^{n+1}z^{n}$ converge uniformemente en la variable u en cualquier conjunto compacto $K\subset\{u\in\mathbb{C}:|u|<|z|^{-1}\}$ a $-(z-u^{-1})^{-1}$ y si $|z|<1$ entonces podemos tomar K tal que $\mathbb{T}\subset K$.

Supongamos una medida positiva. Las m-ésimas sumas parciales son

$$
\sum_{n=0}^{m} u^{-n}z^{-n-1} = z^{-1}\frac{1-(uz)^{-m-1}}{1-(uz)^{-1}}, \qquad \sum_{n=0}^{m} u^{n+1}z^{n} = u\frac{1-(uz)^{m+1}}{1-(uz)}.
$$

Si escribimos $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ y $z=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$ tenemos

$$
\Big|\frac{1-(uz)^{-m-1}}{1-(uz)^{-1}}\Big|^2 = \frac{1-2|z|^{-(m+1)}\cos((m+1)(\theta+\arg z))+|z|^{-2(m+1)}}{1-2|z|^{-1}\cos(\theta+\arg z)+|z|^{-2}}.
$$

Para $|z|^{-1}<1$ tenemos las siguientes desigualdades

$$
\begin{aligned}
0<1-2|z|^{-(m+1)}\cos((m+1)(\theta+\arg z))+|z|^{-2(m+1)} &\leq (1+|z|^{-(m+1)})^2<4,\\
0<1-2|z|^{-1}\cos(\theta+\arg z)+|z|^{-2}) &\geq (1-|z|^{-1})^2,
\end{aligned}
$$

de modo que, para $u\in\mathbb{T}$, obtenemos

$$
\Big|z^{-1}\frac{1-(uz)^{-m-1}}{1-(uz)^{-1}}\Big| < \frac{2|z|^{-1}}{1-|z|^{-1}}, \qquad |z|>1.
$$

De forma similar, concluimos que

$$
\Big|u\frac{1-(uz)^{m+1}}{1-uz}\Big| < \frac{2}{1-|z|}, \qquad |z|<1.
$$

Entonces, para $u \in \mathbb{T}$ y $a = 1, 2$, tenemos las acotaciones

$$\Big|\sum_{n=0}^{m} \varphi_a^{(l)}(u)u^{-n}z^{-n-1}\Big| < \Big|\frac{2}{1-|z|}\varphi_a^{(l)}(u)\Big|, \qquad |z|>1,$$
$$\Big|\sum_{n=0}^{m} \varphi_a^{(l)}(u)u^{n+1}z^{n}\Big| < \Big|\frac{2}{1-|z|}\varphi_a^{(l)}(u)\Big|, \qquad |z|<1.$$

Consecuentemente, como los polinomios de Laurent φ_a son funciones medibles en $\mathbb{T}$, el teorema de la convergencia dominada conduce al resultado deseado.

Finalmente si asumimos que $d\mu = w(\theta)d\theta$, con w una función compleja continua; se puede siempre escribir $w(\theta)d\theta = F(u)\frac{du}{\mathrm{i}\, u}$, $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, con F una función continua en $\mathbb{T}$. Entonces, utilizando la convergencia uniforme de la serie geométrica y el hecho de que los polinomios de Laurent φ_a son funciones continuas en $\mathbb{T}$, podemos intercambiar los símbolos de la serie y la integral para llegar a

1. $\int_{\mathbb{T}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_a(u)u^{-n}z^{-n-1}\Big)d\mu(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_{\mathbb{T}}\Phi_a(u)u^{-n}z^{-n-1})d\mu(u)\Big)$ para $|z|>1$.
2. $\int_{\mathbb{T}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_a(u)u^{n+1}z^{n}\Big)d\mu(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_{\mathbb{T}}\Phi_a(u)u^{n+1}z^{n})d\mu(u)\Big)$ para $|z|<1$. □

Este resultado motiva el nombre dado a estas funciones [89]. Estas expresiones se pueden escribir también como transformadas de Geronimus. Para ese hecho necesitamos recordar que para $u \in \mathbb{T}$

$$\frac{1}{z-u^{-1}} = \frac{1}{2z}\Big(1+\frac{u+z^{-1}}{u-z^{-1}}\Big),$$

y por lo tanto para $l \geq 1$

$$C_1^{(l)} = \frac{1}{2z}\oint_{\mathbb{T}}\frac{u+z^{-1}}{u-z^{-1}}\varphi_2^{(l)}(u)\overline{d\mu(u)}, \qquad \tilde{C}_1^{(l)} = \frac{1}{2z}\oint_{\mathbb{T}}\frac{u+z^{-1}}{u-z^{-1}}\varphi_1^{(l)}(u)d\mu(u), \qquad |z|>1,$$
$$C_2^{(l)} = -\frac{1}{2z}\oint_{\mathbb{T}}\frac{u+z^{-1}}{u-z^{-1}}\varphi_2^{(l)}(u)\overline{d\mu(u)}, \qquad \tilde{C}_2^{(l)} = -\frac{1}{2z}\oint_{\mathbb{T}}\frac{u+z^{-1}}{u-z^{-1}}\varphi_1^{(l)}(u)d\mu(u), \qquad |z|<1.$$

Para $l = 0$, obtenemos (salvo multiplicación por constantes)

$$\frac{1}{2z}(|\mu| + \mathcal{C}(z^{-1})),$$

donde $\mathcal{C}(z)$ es la transformada de Carathéodory de la medida:

$$\mathcal{C}(z) := \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-z}d\mu(\theta).$$

La aplicación del teorema de los residuos a la fórmula en el teorema 5.12 conduce a expresiones para las funciones de segunda especie en términos de residuos:

Proposición 5.13. *Supongamos que $d\mu(\theta) = F(u)\frac{du}{\mathrm{i}\, u}$ entonces:*

1. *Cuando F es una función analítica en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ salvo por un conjunto de singularidades aisladas, y si llamamos $\{z_{j,-}\}_{j=0}^{p_-}$ al conjunto de puntos distintos obtenidos de la unión de $z_{0,-} = 0$ y el conjunto de singularidades de F en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, entonces , para $z \notin \mathbb{T}$,*

$$C_1^{(l)}(z) = 2\pi z^{-1}\Big[\varphi_2^{(l)}(z^{-1})\bar{F}(z)\theta(|z|-1) - \operatorname{Res}_{u=0}\big(\varphi_2^{(l)}(u)\bar{F}(u^{-1})\big)z + \sum_{j=1}^{p_-}\Big(\frac{\varphi_2^{(l)}(\bar{z}_{j,-}^{-1})}{\bar{z}_{j,-}^{-1}-z^{-1}}\operatorname{Res}_{u=\bar{z}_{j,-}^{-1}}\bar{F}(u^{-1})\Big)\Big],$$
$$C_2^{(l)}(z) = 2\pi z^{-1}\Big[\varphi_2^{(l)}(z^{-1})\bar{F}(z)\theta(1-|z|) + \operatorname{Res}_{u=0}\big(\varphi_2^{(l)}(u)\bar{F}(u^{-1})\big)z - \sum_{j=1}^{p_-}\Big(\frac{\varphi_2^{(l)}(\bar{z}_{j,-}^{-1})}{z_{j,-}^{-1}-z^{-1}}\operatorname{Res}_{u=\bar{z}_{j,-}^{-1}}\bar{F}(u^{-1})\Big)\Big].$$

2. *Si F es una función analítica en $\mathbb{D}$ salvo por un conjunto de singularidades aisladas, y llamando $\{z_{j,+}\}_{j=0}^{p_+}$ al conjunto de puntos obtenido de la unión de $z_0=0$ y el conjunto de singularidades de F en $\mathbb{D}$. Entonces, para $z\notin\mathbb{T}$,*

$$\tilde{C}_1^{(l)}(z)=2\pi z^{-1}\Big[\varphi_1^{(l)}(z^{-1})F(z^{-1})\theta(|z|-1)-\operatorname{Res}_{u=0}\big(\varphi_1^{(l)}(u)F(u)\big)z+\sum_{j=1}^{p_+}\Big(\frac{\varphi_1^{(l)}(z_{j,+})}{z_{j,+}-z^{-1}}\operatorname{Res}_{u=z_j}F(u)\Big)\Big],$$

$$\tilde{C}_2^{(l)}(z)=2\pi z^{-1}\Big[\varphi_1^{(l)}(z^{-1})F(z^{-1})\theta(1-|z|)+\operatorname{Res}_{u=0}\big(\varphi_1^{(l)}(u)F(u)\big)z-\sum_{j=1}^{p_+}\Big(\frac{\varphi_1^{(l)}(z_{j,+})}{z_{j,+}-z^{-1}}\operatorname{Res}_{u=z_j}F(u)\Big)\Big].$$

Para concluir esta sección obtenemos distintas reglas de suma que se deducen utilizando series geométricas

Proposición 5.14. *Los OLPUC y sus correspondientes funciones parciales de segunda especie satisfacen*

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty}\overline{C_1^{(l)}}(z)\varphi_{1,1}^{(l)}(z')=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\tilde{C}_1^{(l)}}(z)\varphi_{2,1}^{(l)}(z')=\frac{1}{z-z'}, && |z'|>|z|,\\
&\sum_{l=0}^{\infty}\overline{C_2^{(l)}}(z)\varphi_{1,2}^{(l)}(z')=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\tilde{C}_2^{(l)}}(z)\varphi_{2,2}^{(l)}(z')=-\frac{1}{z-z'}, && |z'|<|z|,\\
&\sum_{l=0}^{\infty}\overline{C_1^{(l)}}(z)\varphi_{1,2}^{(l)}(z')=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{C_2^{(l)}}(z)\varphi_{1,1}^{(l)}(z')=0,\\
&\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\tilde{C}_1^{(l)}}(z)\varphi_{2,2}^{(l)}(z')=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\tilde{C}_2^{(l)}}(z)\varphi_{2,1}^{(l)}(z')=0,
\end{aligned}$$

Demostración. De las definiciones tenemos que

$$(C_1)^\dagger(z)\varphi_{1,1}(z')=\chi_1^*(z)S^{-1}S\chi_1(z')=(\chi_1^*)^\dagger(z)\chi_1(z')=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}(z')^n,$$

$$(\tilde{C}_1)^\dagger(z)\varphi_{2,1}(z')=\chi_1^*(z)\tilde{S}^\dagger(\tilde{S}^\dagger)^{-1}\chi_1(z')=(\chi_1^*)^\dagger(z)\chi_1(z')=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}(z')^n,$$

$$(C_2)^\dagger(z)\varphi_{1,2}(z')=\chi_2(z)S^{-1}S\chi_2^*(z')=(\chi_2^*)^\dagger(z)\chi_2(z')=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}(z')^{-n-1},$$

$$(\tilde{C}_2)^\dagger(z)\varphi_{2,2}(z')=\chi_2(z)\tilde{S}^\dagger(\tilde{S}^\dagger)^{-1}\chi_2^*(z')=(\chi_1^*)^\dagger(z)\chi_1(z')=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}(z')^{-n-1},$$

que, después de estudiar la región de convergencia de las series involucradas conduce al resultado deseado. Las otras identidades se pueden obtener de $(\chi_1^*)^\dagger(z)\chi_2(z')=(\chi_2^*)^\dagger(z)\chi_1(z')=0$. □

5.1.3. Relaciones de recurrencia

El siguiente paso es utilizar la factorización gaussiana para obtener las relaciones CMV de recurrencia y la estructura pentadiagonal para la matriz de Jacobi. Empecemos con las siguientes definiciones

Definición 5.15. Dada la base canónica para matrices semi-infinitas $E_{i,j}, i,j\in\mathbb{Z}_+$, definimos las proyecciones

$$\Pi_1:=\sum_{j=0}^{\infty}E_{2j,2j},\qquad \Pi_2:=\sum_{j=0}^{\infty}E_{2j+1,2j+1},$$

y las matrices

$$
\Lambda_1 := \sum_{j=0}^{\infty} E_{2j,2+2j}, \qquad \Lambda_2 := \sum_{j=0}^{\infty} E_{1+2j,3+2j},
$$
$$
\Lambda := \sum_{j=0}^{\infty} E_{j,j+1}, \qquad \Upsilon := \Lambda_1 + \Lambda_2^\top + E_{1,1}\Lambda^\top.
$$

La matriz Υ,

$$
\Upsilon = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right),
$$

es uno de los elementos centrales de este capítulo, ya que es la que permite el establecimiento de leyes de simetría, leyes de recurrencia, fórmulas de Christoffel-Darboux y la conexión posterior con sistemas tipo Toda.

Proposición 5.16. *Se cumplen las siguientes relaciones*

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1\chi(z) &= z\Pi_1\chi(z), & \Lambda_2\chi(z) &= z^{-1}\Pi_2\chi(z),\\
\Lambda_1^\top\chi(z) &= (z^{-1}\Pi_1 - E_{0,0}\Lambda)\chi(z), & \Lambda_2^\top\chi(z) &= (z\Pi_2 - E_{1,1}\Lambda^\top)\chi(z),
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\Upsilon\chi(z) &= z\chi(z),\\
\Upsilon^\top\chi(z) &= z^{-1}\chi(z).
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

Con estas condiciones caracterizamos la matriz de momentos g mediante una simetría de tipo *string equation*, de la que se deducirán tanto las relaciones de recurrencia como las fórmulas de Christoffel-Darboux. La simetría principal está determinada en la siguiente proposición

Proposición 5.17. *La matriz de momentos CMV satisface la siguiente condición de simetría*

$$
\Upsilon g = g\Upsilon. \tag{5.36}
$$

Demostración. Para probar el resultado anterior procedemos como habitualmente

$$
\begin{aligned}
\Upsilon g &= \oint_{\mathbb{T}} (\Lambda_1 + \Lambda_2^\top + E_{1,1}\Lambda^\top)\chi(z)\chi(z)^\dagger d\mu(z) = \oint_{\mathbb{T}} z\chi(z)\chi(z)^\dagger d\mu(z)\\
&= \oint_{\mathbb{T}} \chi(z)(z^{-1}\chi(z))^\dagger d\mu(z)\\
&= \oint_{\mathbb{T}} \chi(z)((\Lambda_1^\top + \Lambda_2 + E_{0,0}\Lambda)\chi(z))^\dagger d\mu(z)\\
&= g(\Lambda_1 + \Lambda_2^\top + \Lambda^\top E_{0,0})\\
&= g(\Lambda_1 + \Lambda_2^\top + E_{1,1}\Lambda^\top)\\
&= g\Upsilon.
\end{aligned}
$$

□

Ahora procedemos a revestir Υ de dos formas distintas. Si definimos $J_1 := S\Upsilon S^{-1}, J_2 := \tilde{S}\Upsilon\tilde{S}^{-1}$ tenemos que (5.36) implica que $J_1 = J_2$, y consecuentemente podemos definir $J := J_1 = J_2$ que llamaremos matriz CMV de Jacobi. Esta matriz J tiene una estructura pentadiagonal. Ello se deduce cuando se observa que J_1 tiene coeficientes nulos por encima de la tercera diagonal superior y que J_2 tiene todos los coeficientes nulos por debajo de la tercera diagonal inferior. De forma explícita, la estructura es

$$J = \left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc:ccc}
* & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
+ & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hdashline
0 & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & + & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & + & * & * & * & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & * & * & * & 0 & \cdots \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & * & * & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right),$$

donde, $*$ es un término no necesariamente nulo y $+$ es un término positivo.

Usando la factorización LU podemos caracterizar J en términos de los coeficientes de Verblunsky.

Proposición 5.18. *1. Los coeficientes no nulos de J son*

$$\begin{aligned}
J_{2k,2k-1} &= -\rho_{2k}^2\alpha_{2k+1}^{(1)}, & J_{2k,2k} &= -\bar{\alpha}_{2k}^{(2)}\alpha_{2k+1}^{(1)}, \\
J_{2k,2k+1} &= -\alpha_{2k+2}^{(1)}, & J_{2k,2k+2} &= 1, \\
J_{2k+1,2k-1} &= \rho_{2k+1}^2\rho_{2k}^2, & J_{2k+1,2k} &= \rho_{2k+1}^2\bar{\alpha}_{2k}^{(2)}, \\
J_{2k+1,2k+1} &= -\bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}\alpha_{2k+2}^{(1)}, & J_{2k+1,2k+2} &= \bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}.
\end{aligned}$$

2. *Los polinomios de Laurent $\{\varphi_1^{(l)}\}$ verifican las siguientes relaciones de recurrencia de cinco términos*

$$z\varphi_1^{(2k)} = \varphi_1^{(2k+2)} - \alpha_{2k+2}^{(1)}\varphi_1^{(2k+1)} - \bar{\alpha}_{2k}^{(2)}\alpha_{2k+1}^{(1)}\varphi_1^{(2k)} - \rho_{2k}^2\alpha_{2k+1}^{(1)}\varphi_1^{(2k-1)}, \tag{5.37}$$
$$z\varphi_1^{(2k+1)} = \bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}\varphi_1^{(2k+2)} - \bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}\alpha_{2k+2}^{(1)}\varphi_1^{(2k+1)} + \rho_{2k+1}^2\bar{\alpha}_{2k}^{(2)}\varphi_1^{(2k)} + \rho_{2k+1}^2\rho_{2k}^2\varphi_1^{(2k-1)}, \tag{5.38}$$

a las que añadimos las relaciones truncadas para $k = 0, 1$

$$z\varphi_1^{(0)} = \varphi_1^{(2)} - \alpha_2^{(1)}\varphi_1^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\varphi_1^{(0)}, \tag{5.39}$$
$$z\varphi_1^{(1)} = \bar{\alpha}_1^{(2)}\varphi_1^{(2)} - \bar{\alpha}_1^{(2)}\alpha_2^{(1)}\varphi_1^{(1)} + \rho_1^2\varphi_1^{(0)}. \tag{5.40}$$

Demostración. 1. Se puede realizar mediante el cálculo directo

$$\begin{aligned}
J_{2k,2k+2} &= (SE_{2k,2k+2}S^{-1})_{2k,2k+2} = S_{2k,2k}S^{-1}_{2k+2,2k+2} = 1,\\
J_{2k,2k+1} &= (SE_{2k,2k+2}S^{-1})_{2k,2k+1} = S_{2k,2k}S^{-1}_{2k+2,2k+1} = -S_{2k+2,2k+1} = -\alpha^{(1)}_{2k+2},\\
J_{2k,2k} &= (\tilde{S}E_{2k+1,2k-1}\tilde{S}^{-1})_{2k,2k} = \tilde{S}_{2k,2k+1}\tilde{S}^{-1}_{2k-1,2k} =\\
&= -\tilde{S}_{2k,2k}\tilde{S}^{-1}_{2k,2k+1}\tilde{S}_{2k+1,2k+1}\tilde{S}^{-1}_{2k-1,2k} = -\bar{\alpha}^{(2)}_{2k}\alpha^{(1)}_{2k+1},\\
J_{2k,2k-1} &= (\tilde{S}E_{2k+1,2k-1}\tilde{S}^{-1})_{2k,2k-1} = \tilde{S}_{2k,2k+1}\tilde{S}^{-1}_{2k-1,2k-1} =\\
&= -\tilde{S}_{2k,2k}\tilde{S}^{-1}_{2k,2k+1}\tilde{S}_{2k+1,2k+1}\tilde{S}^{-1}_{2k-1,2k-1} = -\rho^2_{2k}\alpha^{(1)}_{2k+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{2k+1,2k-1} &= (\tilde{S}E_{2k+1,2k-1}\tilde{S}^{-1})_{2k+1,2k-1} = \tilde{S}_{2k+1,2k+1}\tilde{S}^{-1}_{2k,2k}\tilde{S}_{2k,2k}\tilde{S}^{-1}_{2k-1,2k-1}\\
&= \rho^2_{2k+1}\rho^2_{2k},\\
J_{2k+1,2k} &= (\tilde{S}E_{2k+1,2k-1}\tilde{S}^{-1})_{2k+1,2k} = \tilde{S}_{2k+1,2k+1}\tilde{S}^{-1}_{2k-1,2k}\\
&= \tilde{S}_{2k+1,2k+1}\tilde{S}^{-1}_{2k,2k}\tilde{S}_{2k,2k}\tilde{S}^{-1}_{2k-1,2k}\\
&= \rho^2_{2k+1}\bar{\alpha}^{(2)}_{2k},\\
J_{2k+1,2k+1} &= (SE_{2k,2k+2}S^{-1})_{2k+1,2k+1} = S_{2k+1,2k}S^{-1}_{2k+2,2k+1} = -S_{2k+1,2k}S_{2k+2,2k+1}\\
&= -\bar{\alpha}^{(2)}_{2k+1}\alpha^{(1)}_{2k+2},\\
J_{2k+1,2k+2} &= (SE_{2k,2k+2}S^{-1})_{2k+1,2k+2} = S_{2k+1,2k}S^{-1}_{2k+2,2k+2} = \bar{\alpha}^{(2)}_{2k+1}.
\end{aligned}$$

2. Tenemos que como $J_1\Phi_1 = S\Upsilon S^{-1}S\chi(z) = z\Phi_1$, la sucesión Φ_1 tiene una ley de recurrencia de cinco términos. Sin embargo aunque hay cinco diagonales que no se anulan, las relaciones de recurrencia no tienen más de cuatro términos no nulos. Esto se puede escribir de forma explícita de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
z\varphi_1^{(2k)} &= J_{2k,2k+2}\varphi_1^{(2k+2)} + J_{2k,2k+1}\varphi_1^{(2k+1)} + J_{2k,2k}\varphi_1^{(2k)} + J_{2k,2k-1}\varphi_1^{(2k-1)},\\
z\varphi_1^{(2k+1)} &= J_{2k+1,2k+2}\varphi_1^{(2k+2)} + J_{2k+1,2k+1}\varphi_1^{(2k+1)} + J_{2k+1,2k}\varphi_1^{(2k)} + J_{2k+1,2k-1}\varphi_1^{(2k-1)}.\square
\end{aligned}$$

Al igual que hemos hecho con la multiplicación por z, también es posible construir estas relaciones de recurrencia para la operación de multiplicación por z^{-1}, en cuyo caso tenemos

Proposición 5.19. *Los OLPUC tienen las siguientes relaciones inversas de recurrencia*

$$z^{-1}\varphi_1^{(2k)} = \alpha^{(1)}_{2k}\varphi_1^{(2k+1)} - \alpha^{(1)}_{2k}\bar{\alpha}^{(2)}_{2k+1}\varphi_1^{(2k)} + \rho^2_{2k}\alpha^{(1)}_{2k-1}\varphi_1^{(2k-1)} + \rho^2_{2k-1}\rho^2_{2k}\varphi_1^{(2k-2)}, \tag{5.41}$$

$$z^{-1}\varphi_1^{(2k+1)} = \varphi_1^{(2k+3)} - \bar{\alpha}^{(2)}_{2k+3}\varphi_1^{(2k+2)} - \alpha^{(1)}_{2k+1}\bar{\alpha}^{(2)}_{2k+2}\varphi_1^{(2k+1)} - \rho^2_{2k+1}\bar{\alpha}^{(2)}_{2k+2}\varphi_1^{(2k)}, \tag{5.42}$$

a la que hay que añadir la relación truncada

$$z^{-1}\varphi_1^{(0)} = \varphi_1^{(1)} - \bar{\alpha}_1^{(2)}\varphi_1^{(0)}. \tag{5.43}$$

Demostración. Usando que $S\Upsilon^\top S^{-1}\Phi_1 = S\Upsilon^\top S^{-1}S\chi(z) = z^{-1}\Phi_1$ necesitamos calcular los coeficientes de $S\Upsilon^\top S^{-1} = \tilde{S}\Upsilon^\top\tilde{S}^{-1}$ como hicimos con J_1, para obtener el resultado deseado. □

A partir de los resultados anteriores podemos obtener que

Proposición 5.20. *Los coeficientes ρ_l^2 verifican las siguientes relaciones*

$$\rho_k^2 = 1 - \alpha_k^{(1)}\bar{\alpha}_k^{(2)}, \qquad k \geq 0. \tag{5.44}$$

Demostración. Para $k = 0$ el resultado se deduce directamente de la definición de ρ_0^2. Para $k = 1, 2$ tenemos que usar las relaciones truncadas,

$$\begin{aligned} z^{-1}\varphi_1^{(0)} &= \varphi_1^{(1)} - \bar{\alpha}_1^{(2)}\varphi_1^{(0)}, & z\varphi_1^{(0)} &= \varphi_1^{(2)} - \alpha_2^{(1)}\varphi_1^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\varphi_1^{(0)},\\ z^{-1}\varphi_1^{(1)} &= \varphi_1^{(3)} - \bar{\alpha}_3^{(2)}\varphi_1^{(2)} - \alpha_1^{(1)}\bar{\alpha}_2^{(2)}\varphi_1^{(1)} - \rho_1^2\bar{\alpha}_2^{(2)}\varphi_1^{(0)}, & z\varphi_1^{(1)} &= \bar{\alpha}_1^{(2)}\varphi_1^{(2)} - \alpha_2^{(1)}\bar{\alpha}_1^{(2)}\varphi_1^{(1)} + \rho_1^2\varphi_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Multiplicando por z e integrando se obtiene $h_0 = h_1 - \bar{\alpha}_1^{(2)}\int\varphi_1^{(0)}zd\mu$, y $\int\varphi_1^{(0)}zd\mu = -\alpha_1^{(1)}h_0$, de donde tenemos $h_0 = h_1 + \bar{\alpha}_1^{(2)}\alpha_1^{(1)}h_0$. Ahora multiplicando por z^{-1} e integrando se obtiene $0 = \bar{\alpha}_1^{(2)}h_2 - \alpha_2^{(1)}\bar{\alpha}_1^{(2)}\int\varphi_1^{(1)}z^{-1}d\mu + \rho_1^2\int\varphi_1^{(0)}z^{-1}d\mu$, $\int\varphi_1^{(1)}z^{-1}d\mu = -\rho_1^2\bar{\alpha}_2^{(2)}h_0$ y $\int\varphi_1^{(0)}z^{-1}d\mu = -\bar{\alpha}_1^{(2)}h_0$ lo que conduce a $0 = h_2 + \alpha_2^{(1)}\bar{\alpha}_2^{(2)}h_1 - h_1$.

La relación para $k \geq 2$ se puede probar por inducción. En el caso impar multiplicamos (5.41) por z^{k+1} para obtener

$$0 = \alpha_{2k}^{(1)}h_{2k+1} - \alpha_{2k}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}\int_{\mathbb{T}}\varphi_1^{(2k)}z^{k+1}d\mu + \rho_{2k}^2\alpha_{2k-1}^{(1)}\int_{\mathbb{T}}\varphi_1^{(2k-1)}z^{k+1}d\mu + \rho_{2k-1}^2\rho_{2k}^2\int_{\mathbb{T}}\varphi_1^{(2k-2)}z^{k+1}d\mu.$$

Después, multiplicamos por z^k las relaciones de recurrencia (5.37) y (5.38) para $z\varphi_1^{(2k)}$, $z\varphi_1^{(2k-1)}$, $z\varphi_1^{(2k-2)}$. Por último integramos y obtenemos

$$0 = h_{2k+1} + \alpha_{2k+1}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}h_{2k} - \alpha_{2k-1}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k-1}^{(2)}h_{2k} - \rho_{2k-1}^2h_{2k},$$

de donde se deduce el resultado usando el principio de inducción.

Si queremos obtener el resto de las ecuaciones (aquellas con k impar), entonces es necesario multiplicar por z^{-k-1} las relaciones impares de recurrencia para $z\varphi_1^{(2k+1)}$ (5.38) y usamos el mismo procedimiento. □

Los siguientes resultados ya se encontraban en [29] usando una formulación alternativa. Recordando la forma explícita para la matriz CMV de Jacobi J de la proposición 5.18 obtenemos

Proposición 5.21. *Cuando la medida μ es positiva las relaciones de recurrencia para los OLPUC se pueden expresar en términos de los coeficientes de Verblunsky como sigue*

$$\begin{aligned} z\varphi_1^{(2k)} &= \varphi_1^{(2k+2)} - \alpha_{2k+2}\varphi_1^{(2k+1)} - \bar{\alpha}_{2k}\alpha_{2k+1}\varphi_1^{(2k)} - \rho_{2k}^2\alpha_{2k+1}\varphi_1^{(2k-1)},\\ z\varphi_1^{(2k+1)} &= \bar{\alpha}_{2k+1}\varphi_1^{(2k+2)} - \bar{\alpha}_{2k+1}\alpha_{2k+2}\varphi_1^{(2k+1)} + \rho_{2k+1}^2\bar{\alpha}_{2k}\varphi_1^{(2k)} + \rho_{2k+1}^2\rho_{2k}^2\varphi_1^{(2k-1)}, \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned} z^{-1}\varphi_1^{(2k)} &= \alpha_{2k}\varphi_1^{(2k+1)} - \alpha_{2k}\bar{\alpha}_{2k+1}\varphi_1^{(2k)} + \rho_{2k}^2\alpha_{2k-1}\varphi_1^{(2k-1)} + \rho_{2k-1}^2\rho_{2k}^2\varphi_1^{(2k-2)},\\ z^{-1}\varphi_1^{(2k+1)} &= \varphi_1^{(2k+3)} - \bar{\alpha}_{2k+3}\varphi_1^{(2k+2)} - \alpha_{2k+1}\bar{\alpha}_{2k+2}\varphi_1^{(2k+1)} - \rho_{2k+1}^2\bar{\alpha}_{2k+2}\varphi_1^{(2k)}, \end{aligned} \tag{5.46}$$

donde $k \geq 0$.

Usando los polinomios de Szegő y sus recíprocos, las relaciones de recurrencia (5.37) y (5.38) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} zP_{2k} &= z^{-1}(P_{2k+2} - \alpha_{2k+2}(k)P_{2k+1}^*) + -\bar{\alpha}_{2k}\alpha_{2k+1}P_{2k} - (1 - |\alpha_{2k}|^2)\alpha_{2k+1}P_{2k-1}^*,\\ zP_{2k+1}^* &= \bar{\alpha}_{2k+1}P_{2k+2} - \bar{\alpha}_{2k+1}\alpha_{2k+2}P_{2k+1}^* + z((1 - |\alpha_{2k+1}|^2)\bar{\alpha}_{2k}P_{2k} + (1 - |\alpha_{2k+1}|^2)(1 - |\alpha_{2k}|^2)P_{2k-1}^*), \end{aligned}$$

relaciones que se pueden obtener a partir de las relaciones clásicas de recurrencia de Szegő para los polinomios y sus recíprocos en $\mathbb{T}$.

5.1.4. Operadores de proyección y núcleo de Christoffel-Darboux

Una vez estudiada la simetría de la matriz de momentos estudiamos el núcleo de Christoffel-Darboux. Este núcleo es en este caso el núcleo de la representación integral de la que denominamos *proyección cuasi-ortogonal* correspondiente a la forma sesquilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{L}}$ definida por la medida μ, en el espacio de los OLPUC.

Definición 5.22. Usamos la siguiente notación

$$\Lambda^{[l]} := \mathbb{C}\{\chi^{(0)},\dots,\chi^{(l-1)}\} = \begin{cases} \Lambda_{[k,k-1]}, & l=2k, \\ \Lambda_{[k,k]}, & l=2k+1. \end{cases} \tag{5.47}$$

Obsérvese que

$$\Lambda^{[l]} = \mathbb{C}\{\varphi_1^{(0)},\dots,\varphi_1^{(l-1)}\} = \mathbb{C}\{\varphi_2^{(0)},\dots,\varphi_2^{(l-1)}\}.$$

Estos espacios de polinomios de Laurent truncados tiene los siguientes, *complementos cuasi-ortogonales*,

$$(\Lambda^{[l]})^{\perp_2} := \Big\{\sum_{l\le k\ll\infty} c_k\varphi_1^{(k)}, c_k\in\mathbb{C}\Big\}, \qquad (\Lambda^{[l]})^{\perp_1} := \Big\{\sum_{l\le k\ll\infty} c_k\varphi_2^{(k)}, c_k\in\mathbb{C}\Big\}. \tag{5.48}$$

para los que podemos establecer las siguientes relaciones de *cuasi-bi-ortogonalidad*

$$\langle\Lambda^{[l]},(\Lambda^{[l]})^{\perp_1}\rangle_{\mathscr{L}} = 0, \qquad \langle(\Lambda^{[l]})^{\perp_2},\Lambda^{[l]}\rangle_{\mathscr{L}} = 0,$$

y las descomposiciones

$$\Lambda_{[\infty]} = \Lambda^{[l]} \oplus (\Lambda^{[l]})^{\perp_1} = \Lambda^{[l]} \oplus (\Lambda^{[l]})^{\perp_2},$$

inducen las siguientes *proyecciones cuasi-ortogonales*

$$\pi_1^{(l)} : \Lambda_{[\infty]} \to \Lambda^{[l]}, \qquad \pi_2^{(l)} : \Lambda_{[\infty]} \to \Lambda^{[l]}.$$

No podemos hablar propiamente de un complemento ortogonal y una proyección ortogonal si la medida no es positiva y ésta no define un producto escalar. Son en cambio las proyecciones de $\Lambda_{[\infty]}$ sobre $\Lambda^{[l]}$ paralelamente a $(\Lambda^{[l]})^{\perp_1}$ y a $(\Lambda^{[l]})^{\perp_2}$. Si μ es una medida positiva entonces $(\Lambda^{[l]})^{\perp_1} = (\Lambda^{[l]})^{\perp_2} = (\Lambda^{[l]})^{\perp}$, ambas proyecciones son realmente proyecciones ortogonales y coinciden.

Definición 5.23. El núcleo de Christoffel-Darboux se define como

$$K^{[l]}(z,z') := \sum_{k=0}^{l-1} \varphi_1^{(k)}(z')\bar{\varphi}_2^{(k)}(\bar{z}). \tag{5.49}$$

En el caso de que tengamos una medida positiva μ se pueden definir los polinomios ortonormales de Laurent $\tilde{\varphi}^{(l)} = (h_l)^{-\frac{1}{2}}\varphi_1^{(l)} = (h_l)^{\frac{1}{2}}\varphi_2^{(l)}$ de modo que $K^{[l]}(z,z') = \sum_{k=0}^{l-1} h_k^{-1}\varphi_1^{(k)}(z')\bar{\varphi}_1^{(k)}(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{l-1} h_k\varphi_2^{(k)}(z')\bar{\varphi}_2^{(k)}(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{\varphi}^{(k)}(z')\overline{\tilde{\varphi}^{(k)}}(\bar{z})$.

Este es el núcleo de la representación integral de las proyecciones $\pi_1^{(l)},\pi_2^{(l)}$ y verifica la propiedad de tipo reproductivo análogamente al caso de la recta estudiado en el capítulo 4.

Proposición 5.24. *1. El núcleo de Christoffel-Darboux admite la siguiente representación integral*

$$\begin{aligned}(\pi_2^{(l)}f)(z) &= \oint_{\mathbb{T}} K^{[l]}(z',z)f(z)d\mu(z'), \quad \forall f\in\Lambda_{[\infty]},\\ \overline{(\pi_1^{(l)}f)(z)} &= \oint_{\mathbb{T}} K^{[l]}(z,z')\bar{f}(\bar{z}')d\mu(z'), \quad \forall f\in\Lambda_{[\infty]}.\end{aligned} \tag{5.50}$$

2. El núcleo $K^{[l]}(z,z')$ verifica

$$K^{[l]}(z,z') = \oint_{\mathbb{T}} K^{[l]}(z,u)K^{[l]}(u,z')d\mu(u). \tag{5.51}$$

Demostración. Se sigue de la condición de bi-ortogonalidad (5.10). □

5.1.5. Polinomios asociados de Laurent

Para encontrar la fórmula de Christoffel-Darboux deseada necesitamos definir los siguientes polinomios asociados de Laurent

Definición 5.25. Para el caso de l par, los polinomios asociados de Laurent se definen como

$$\begin{aligned}\varphi_{1,+1}^{(l)} &:= \chi^{(l)} - \begin{pmatrix} g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l-1}\end{pmatrix}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}, & \varphi_{1,-2}^{(l-1)} &:= e_{l-1}^{\top}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]},\\ \varphi_{2,+2}^{(l)} &:= \chi^{(l+1)} - \begin{pmatrix}\bar{g}_{0,l+1} & \bar{g}_{1,l+1} & \cdots & \bar{g}_{l-1,l+1}\end{pmatrix}((g^{[l]})^{-1})^{\dagger}\chi^{[l]}, & \varphi_{2,-1}^{(l-1)} &:= e_{l-2}^{\top}((g^{[l]})^{-1})^{\dagger}\chi^{[l]},\end{aligned}$$

mientras que para el caso l impar definimos

$$\begin{aligned}\varphi_{1,+1}^{(l)} &:= \chi^{(l+1)} - \begin{pmatrix} g_{l+1,0} & g_{l+1,1} & \cdots & g_{l+1,l-1}\end{pmatrix}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}, & \varphi_{1,-2}^{(l-1)} &:= e_{l-2}^{\top}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]},\\ \varphi_{2,+2}^{(l)} &:= \chi^{(l)} - \begin{pmatrix}\bar{g}_{0,l} & \bar{g}_{1,l} & \cdots & \bar{g}_{l-1,l}\end{pmatrix}((g^{[l]})^{-1})^{\dagger}\chi^{[l]}, & \varphi_{2,-1}^{(l-1)} &:= e_{l-1}^{\top}((g^{[l]})^{-1})^{\dagger}\chi^{[l]}.\end{aligned}$$

Estos polinomios asociados de Laurent se pueden expresar de tres formas alternativas

Teorema 5.26. *Si μ es una medida positiva los polinomios asociados de Laurent tienen las siguientes expresiones equivalentes*

1. En el caso de que l sea par se verifican las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\varphi_{1,+1}^{(l)}(z) &= \varphi_1^{(l)}(z), & \varphi_{1,-2}^{(l-1)}(z) &= h_{l-1}^{-1}\varphi_1^{(l-1)}(z),\\ \varphi_{2,+2}^{(l)}(z) &= z^{-1}h_l\bar{\varphi}_2^{(l)}(z^{-1}), & \varphi_{2,-1}^{(l-1)}(z) &= z^{-1}\bar{\varphi}_2^{(l-1)}(z^{-1}),\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned} &= z^{-1}(\bar{\alpha}_l h_l\varphi_2^{(l)}(z) + h_{l-1}\rho_l^2\varphi_2^{(l-1)}(z)), & &= z^{-1}(\rho_l^2\varphi_2^{(l)}(z) - \alpha_l\varphi_2^{(l-1)}(z)),\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned} &= h_{l+1}\varphi_2^{(l+1)}(z) - h_l\bar{\alpha}_{l+1}\varphi_2^{(l)}(z), & &= \alpha_{l-1}\varphi_2^{(l-1)}(z) + \varphi_2^{(l-2)}(z),\end{aligned} \tag{5.54}$$

2. En el caso de que l sea impar las expresiones adecuadas son

$$\begin{aligned}\varphi_{2,+2}^{(l)}(z) &= h_l^{-1}\varphi_2^{(l)}(z), & \varphi_{2,-1}^{(l-1)}(z) &= \varphi_2^{(l-1)}(z),\\ \varphi_{1,+1}^{(l)}(z) &= \bar{\varphi}_1^{(l)}(z^{-1}), & \varphi_{1,-2}^{(l-1)}(z) &= h_{l-1}^{-1}\bar{\varphi}_1^{(l-1)}(z^{-1}),\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned} &= z(\alpha_l\varphi_1^{(l)}(z) + \rho_l^2\varphi_1^{(l-1)}(z)), & &= z(h_l^{-1}\rho_l^2\varphi_1^{(l)}(z) - \bar{\alpha}_l h_{l-1}^{-1}\varphi_1^{(l-1)}(z)),\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned} &= \varphi_1^{(l+1)}(z) - \alpha_{l+1}\varphi_1^{(l)}(z), & &= h_{l-1}^{-1}\bar{\alpha}_{l-1}\varphi_1^{(l-1)}(z) + h_{l-2}^{-1}\varphi_1^{(l-2)}(z).\end{aligned} \tag{5.57}$$

Demostración. 1. Para probar (5.52) y (5.55) procedemos como sigue.

Por un lado, cuando l es par (5.58) implica

$$\oint_{\mathbb{T}} z\varphi_{2,+2}^{(l)}(z)z^{-j}d\mu(z) = 0, \qquad j = -\frac{l}{2}+1,\dots,\frac{l}{2},$$

y por otro lado, debido a la propiedad hermítica del producto escalar, se deduce para $\varphi_2^{(l)}$ que

$$\oint_{\mathbb{T}} \bar{\varphi}_2^{(l)}(z^{-1})z^{-j}d\mu(z) = 0, \qquad j = -\frac{l}{2}+1,\dots,\frac{l}{2}.$$

Por lo tanto, $z\varphi_{2,+2}^{(l)} \in \Lambda_{[l/2,l/2]}$ y resuelve el mismo sistema lineal de ecuaciones que $\bar{\varphi}_2^{(l)}(z^{-1}) \in \Lambda_{[l/2,l/2]}$, consecuentemente los dos polinomios son proporcionales. La igualdad entre ambos se obtiene comparando los coeficientes en $z^{-\frac{l}{2}}$.

De forma similar, de (5.59) se obtiene que

$$\oint_{\mathbb{T}} z^j z^{-1}\bar{\varphi}_{2,-1}^{(l-1)}(z^{-1})d\mu(z) = 0, \quad j = -\frac{l}{2}+1,\dots,\frac{l}{2}-1, \quad \oint_{\mathbb{T}} z^{\frac{l}{2}} z^{-1}\bar{\varphi}_{2,-1}^{(l-1)}(z^{-1})d\mu(z) = 1.$$

Esto significa que $z\varphi_{2,-1}^{(l-1)}(z) \in \Lambda_{[l/2-1,l/2]}$ y tiene las mismas relaciones de ortogonalidad e idéntica condición de normalización que $\bar{\varphi}_2^{(l-1)}(z^{-1}) \in \Lambda_{[l/2-1,l/2]}$, de modo que son iguales.

Procediendo de forma análoga, en el caso impar se obtiene (5.55).

2. Para (5.53) y (5.56) procedemos del siguiente modo. Usamos primero las relaciones de ortogonalidad para $\bar{\varphi}_1^{(l)}(z^{-1})$ y $\bar{\varphi}_2^{(l-1)}(z^{-1})$ concluimos que

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1^{(l)}(z^{-1}) &\in \operatorname{span}\{\varphi_1^{(l)}, \varphi_1^{(l-1)}\},\\ \bar{\varphi}_2^{(l-1)}(z^{-1}) &\in \operatorname{span}\{\varphi_2^{(l)}, \varphi_2^{(l-1)}\},\end{aligned}$$

e identificando coeficientes se obtiene

$$\begin{aligned}&z\varphi_{2,+2}^{(l)}(z) = h_l\bar{\varphi}_2^{(l)}(z^{-1}) = \bar{\varphi}_1^{(l)}(z^{-1}) = \bar{\alpha}_l\varphi_1^{(l)}(z) + \rho_l^2\varphi_1^{(l-1)}(z) = \bar{\alpha}_l h_l\varphi_2^{(l)}(z) + \rho_l^2 h_{l-1}\varphi_2^{(l-1)}(z),\\ &z\varphi_{2,-1}^{(l-1)}(z) = \bar{\varphi}_2^{(l-1)}(z^{-1}) = \rho_l^2\varphi_2^{(l)}(z) - \alpha_l\varphi_2^{(l-1)}(z).\end{aligned}$$

Esto prueba (5.53), y (5.56) se demuestra de forma similar.

3. Finalmente probamos (5.54) y (5.57). Para el caso par calculamos la siguiente integral

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbb{T}} \chi^{[l]}(z)\bar{\varphi}_{2,+2}^{(l)}(\bar{z})d\mu(z) &= \oint_{\mathbb{T}} \chi^{[l]}(z)(\chi^{(l+1)}(z))^\dagger d\mu(z) -\\ &- \oint_{\mathbb{T}} \chi^{[l]}(z)\chi^{[l]}(z)^\dagger d\mu(z)(g^{[l]})^{-1}\begin{pmatrix} g_{0,l+1}\\ g_{1,l+1}\\ \dots\\ g_{l-1,l+1}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} g_{0,l+1} & g_{1,l+1} & \dots & g_{l-1,l+1}\end{pmatrix}^\top - \begin{pmatrix} g_{0,l+1} & g_{1,l-1}\dots & g_{l-1,l+1}\end{pmatrix}^\top\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}^\top,\end{aligned}$$

que escrita utilizando componentes da como resultado

$$\oint_{\mathbb{T}} z^j \bar{\varphi}^{(l)}_{2,+2}(\bar{z}) d\mu(z) = 0, \qquad j = -\frac{l}{2}, \dots, \frac{l}{2} - 1. \tag{5.58}$$

Se sigue también de la definición que $\bar{\varphi}^{(l)}_{2,+2}(z^{-1}) \in \Lambda_{[\frac{l}{2}-1, \frac{l}{2}+1]}$, y $(\bar{\varphi}^{(l)}_{2,+2} - z^{\frac{l}{2}+1}) \in \Lambda_{[\frac{l}{2}-1, \frac{l}{2}]}$.

Para los otros polinomios asociados, las relaciones de ortogonalidad son

$$\oint_{\mathbb{T}} z^j \bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z}) d\mu(z) = 0, \quad j = -\frac{l}{2}, \dots, \frac{l}{2} - 2, \quad \oint_{\mathbb{T}} z^{\frac{l}{2}-1} \bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z}) d\mu(z) = 1. \tag{5.59}$$

Para obtener este resultado procedemos como antes

$$\oint_{\mathbb{T}} \chi^{[l]}(z) \bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z}) d\mu(z) = \left(\oint_{\mathbb{T}} \chi^{[l]}(z) \chi^{[l]}(z)^{\dagger} d\mu(z) \right) (g^{[l]})^{-1} e_{l-2} = e_{l-2},$$

que es la versión matricial de las relaciones de ortogonalidad.

Estas relaciones de ortogonalidad conducen a las ecuaciones

$$\varphi^{(l)}_{2,+2} = a_l \varphi^{(l+1)}_2 + b_l \varphi^{(l)}_2, \qquad \varphi^{(l-1)}_{2,-1} = c_{l-1} \varphi^{(l-1)}_2 + d_{l-1} \varphi^{(l-2)}_2.$$

Probemos esta afirmación. Como $\varphi^{(l)}_{2,+2} \in \Lambda_{[\frac{l}{2}+1, \frac{l}{2}-1]}$ entonces $\varphi^{(l)}_{2,+2} \in \operatorname{span}\{\varphi^{(0)}_2, \varphi^{(1)}_2, \dots, \varphi^{(l+1)}_2\}$, pero debido a las relaciones de ortogonalidad todos los coeficientes de anulan salvo los que corresponden a $\varphi^{(l+1)}_2$ y $\varphi^{(l)}_2$. Comparando los coeficientes de $z^{-\frac{l}{2}-1}$ y $z^{\frac{l}{2}}$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$1 = (S_2)^{-1}_{l+1,l+1} a_l + 0, \qquad 0 = a_l (S_2)^{-1}_{l+1,l+1} \bar{\alpha}_{l+1} + (S_2)^{-1}_{l,l} b_l,$$

de ahí concluimos $a_l = (S_2)_{l+1,l+1}$ y $b_l = -\bar{\alpha}_{l+1} (S_2)_{l,l}$.

Ahora, observamos que $\varphi^{(l-1)}_{2,-1} \in \operatorname{span}\{\varphi^{(0)}_2, \varphi^{(1)}_2, \dots, \varphi^{(l-1)}_2\}$ y que estas relaciones de ortogonalidad implican que

$$\varphi^{(l-1)}_{2,-1} \perp \operatorname{span}\{\varphi^{(0)}_2, \varphi^{(1)}_2, \dots, \varphi^{(l-3)}_2\}.$$

La consecuencia de esto es que $\varphi^{(l-1)}_{2,-1} \in \operatorname{span}\{\varphi^{(l-2)}_2, \varphi^{(l-1)}_2\}$ y solo necesitamos encontrar la expresión de los polinomios asociados como combinación lineal de estos dos polinomios de Laurent. Para ello tomamos el complejo conjugado, multiplicamos por $\varphi^{(l-1)}_1$ y $\varphi^{(l-2)}_1$, e integramos para llegar a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \bar{c}_{l-1} &= \oint_{\mathbb{T}} \varphi^{(l-1)}_1(z) \bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z}) d\mu(z) = \oint_{\mathbb{T}} z^{-\frac{l}{2}} \bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z}) d\mu(z) + \bar{\alpha}_{l-1} \oint_{\mathbb{T}} z^{\frac{l}{2}-1} \bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z}) d\mu(z) = 0 + \bar{\alpha}_{l-1}, \\ \bar{d}_{l-1} &= \oint_{\mathbb{T}} \varphi^{(l-2)}_1(z) \bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z}) d\mu(z) = \oint_{\mathbb{T}} z^{\frac{l}{2}-1} \bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z}) d\mu(z) = 1, \end{aligned}$$

de donde obtenemos $c_{l-1} = \alpha_{l-1}$ y $d_{l-1} = 1$.

Para el caso impar se procede de forma similar y no daremos aquí la prueba ya que no contiene ningún elemento nuevo. □

Finalmente damos una expresión para estos polinomios en forma de determinantes (que nos será de ayuda a la hora de encontrar representaciones en forma de funciones τ de estos polinomios).

Proposición 5.27. *Los polinomios asociados de Laurent tienen las siguientes expresiones*

$$\varphi_{1,+a}^{(l)}(z)=\frac{1}{\det g^{[l]}}\det\left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & \chi^{(0)}(z)\\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & \chi^{(1)}(z)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & \chi^{(l-1)}(z)\\ \hline g_{l_{+a},0} & g_{l_{+a},1} & \cdots & g_{l_{+a},l-1} & \chi^{(l_{+a})}(z)\end{array}\right),\qquad l\geq 1. \tag{5.60}$$

$$\varphi_{1,-a}^{(l)}(z)=\frac{(-1)^{l+l_{-a}}}{\det g^{[l+1]}}\det\left(\begin{array}{cccc:ccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l_{-a}-1} & g_{0,l_{-a}+1} & \cdots & g_{0,l} & \chi^{(0)}(z)\\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l_{-a}-1} & g_{1,l_{-a}+1} & \cdots & g_{1,l} & \chi^{(1)}(z)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ g_{l,0} & g_{1} & \cdots & g_{l,l_{-a}-1} & g_{l,l_{-a}+1} & \cdots & g_{l_{+a},l} & \chi^{(l)}(z)\end{array}\right),\quad l\geq 1. \tag{5.61}$$

y

$$\bar{\varphi}_{2,+a}^{(l)}(\bar{z})=\frac{1}{\det g^{[l]}}\det\left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} & g_{0,l_{+a}}\\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} & g_{1,l_{+a}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-1} & g_{l-1,l_{+a}}\\ \hline (\chi^{(0)}(z))^{\dagger} & (\chi^{(1)}(z))^{\dagger} & \dots & (\chi^{(l-1)}(z))^{\dagger} & (\chi^{(l_{+a})}(z))^{\dagger}\end{array}\right),\quad l\geq 1. \tag{5.62}$$

$$\bar{\varphi}_{2,-a}^{(l)}(\bar{z})=\frac{(-1)^{l+l_{-a}}}{\det g^{[l+1]}}\det\left(\begin{array}{cccc} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l}\\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_{l_{-a}-1,0} & g_{l_{-a}-1,1} & \cdots & g_{l_{-a}-1,l}\\ \hdashline g_{l_{-a}+1,0} & g_{l_{-a}+1,1} & \cdots & g_{l_{-a}+1,l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l}\\ \hline (\chi^{(0)}(z))^{\dagger} & (\chi^{(1)}(z))^{\dagger} & \dots & (\chi^{(l)}(z))^{\dagger}\end{array}\right),\qquad l\geq 1. \tag{5.63}$$

5.1.6. La fórmula de Christoffel-Darboux

Para obtener la fórmula de Christoffel-Darboux necesitamos varios lemas preliminares. En primer lugar consideramos la versión del teorema de Aitken-Berg-Collar adecuada para este caso

Lema 5.28. *Se verifica la siguiente fórmula de tipo ABC*

$$K^{[l]}(z,z')=\chi^{[l]}(z)^{\dagger}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(z').$$

Lema 5.29. *Para el núcleo de Christoffel-Darboux tenemos la siguiente expresión compacta*

$$\begin{aligned}(z'-\bar{z}^{-1})K^{[l]}(z,z') &= \chi^{[l]}(z)^{\dagger}(g^{[l]})^{-1}z'\chi^{[l]}(z')-\bar{z}^{-1}\chi^{[l]}(z)^{\dagger}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(z')\\ &= (\chi^{[l]}(z)^{\dagger}(g^{[l]})^{-1}g^{[l,\geq l]}-\chi^{[\geq l]}(z)^{\dagger})\Upsilon^{[\geq l,l]}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(z')-\\ &-\chi^{[l]}(z)^{\dagger}(g^{[l]})^{-1}\Upsilon^{[l,\geq l]}(g^{[\geq l,l]}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(z')-\chi^{[\geq l]}(z')).\end{aligned}$$

Lema 5.30. *Si l es par*

$$\Upsilon^{[l,\geq l]} = E_{l-2,l-l} = e_{l-2}e_0^\top, \qquad \Upsilon^{[\geq l,l]} = E_{l+1-l,l-1} = e_1 e_{l-1}^\top,$$

mientras que para l impar tenemos

$$\Upsilon^{[l,\geq l]} = E_{l-1,l+1-l} = e_{l-1}e_1^\top, \qquad \Upsilon^{[\geq l,l]} = E_{l-l,l-2} = e_0 e_{l-2}^\top.$$

La fórmula de Christoffel-Darboux como resultado principal de esta sección se puede obtener usando las expresiones previas

Teorema 5.31. *Se verifica la siguiente fórmula de Christoffel-Darboux*

$$K^{[l]}(z,z') = \frac{\bar{\varphi}^{(l)}_{2,+2}(\bar{z})\bar{z}\varphi^{(l-1)}_{1,-2}(z') - \varphi^{(l)}_{1,+1}(z')\bar{z}\bar{\varphi}^{(l-1)}_{2,-1}(\bar{z})}{(1-z'\bar{z})}, \qquad z'\bar{z} \neq 1. \tag{5.64}$$

Demostración. La prueba de (5.64) se basa en los lemas 5.29 y 5.30.

En primer lugar estudiemos el caso l par. Con los lemas 5.29 y 5.30 obtenemos una expresión más explícita del núcleo de Christoffel-Darboux dada por

$$\begin{aligned}(\bar{z}^{-1} - z')K^{[l]}(z,z') = {}&(\chi^{(l+1)}(z)^\dagger - \chi^{[l]}(z)^\dagger (g^{[l]})^{-1} g^{[l,\geq l]} e_1) e_{l-1}^\top (g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(z') - \\ &- \chi^{[l]}(z)^\dagger (g^{[l]})^{-1} e_{l-2}(\chi^{(l)}(z') - e_0^\top g^{[\geq l,l]}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(z')),\end{aligned}$$

a continuación usando la definición 5.25 para los polinomios asociados de Laurent y el teorema 5.26 obtenemos (5.64).

El caso de l impar se obtiene razonando otra vez con los lemas 5.29 y 5.30, lo que nos lleva a

$$\begin{aligned}(\bar{z}^{-1} - z')K^{[l]}(z,z') = {}&(\chi^{(l)}(z)^\dagger - \chi^{[l]}(z)^\dagger (g^{[l]})^{-1} g^{[l,\geq l]} e_0) e_{l-2}^\top (g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(z') - \\ &- \chi^{[l]}(z)^\dagger (g^{[l]})^{-1} e_{l-1}(\chi^{(l+1)}(z') - e_1^\top g^{[\geq l,l]}(g^{[l]})^{-1}\chi^{[l]}(z')),\end{aligned}$$

y recordando de nuevo la definición 5.25 terminamos la prueba. □

Recordando las distintas expresiones para los polinomios asociados de Laurent que obtuvimos en el teorema 5.26, podemos construir expresiones alternativas

Corolario 5.32. *Para una medida positiva μ el núcleo de Christoffel-Darboux se puede escribir de las siguientes formas alternativas.*

En el caso de l par se puede escribir como

$$K^{[l]}(z,z') = \frac{\varphi_1^{(l)}(\bar{z}^{-1})\varphi_2^{(l-1)}(z') - \varphi_1^{(l)}(z')\varphi_2^{(l-1)}(\bar{z}^{-1})}{(1-z'\bar{z})} \tag{5.65}$$

$$= \frac{\overline{(\bar{\alpha}_l\varphi_1^{(l)}(z) + \rho_l^2\varphi_1^{(l-1)}(z))}\varphi_2^{(l-1)}(z') - \varphi_1^{(l)}(z')\overline{(\rho_l^2\varphi_2^{(l)}(z) - \alpha_l\varphi_2^{(l-1)}(z))}}{(1-z'\bar{z})} \tag{5.66}$$

$$= \frac{\overline{z(\varphi_1^{(l+1)}(z) - \bar{\alpha}_{l+1}\varphi_1^{(l)}(z))}\varphi_2^{(l-1)}(z') - \varphi_1^{(l)}(z')\overline{z(\alpha_{l-1}\varphi_2^{(l-1)}(z) + \varphi_2^{(l-2)}(z))}}{(1-z'\bar{z})}, \tag{5.67}$$

mientras que en el caso de l impar se puede escribir como

$$K^{[l]}(z,z') = \frac{\bar{z}\bar{\varphi}_1^{(l)}(\bar{z})\bar{\varphi}_2^{(l-1)}(z'^{-1}) - \bar{\varphi}_1^{(l)}(z'^{-1})\bar{z}\bar{\varphi}_2^{(l-1)}(\bar{z})}{(1-z'\bar{z})} \tag{5.68}$$

$$= \bar{z}z'\frac{\bar{\varphi}_1^{(l)}(\bar{z})(\rho_l^2\varphi_2^{(l)}(z') - \bar{\alpha}_l\varphi_2^{(l-1)}(z')) - (\alpha_l\varphi_1^{(l)}(z') + \rho_l^2\varphi_1^{(l-1)}(z'))\bar{\varphi}_2^{(l-1)}(\bar{z})}{(1-z'\bar{z})} \tag{5.69}$$

$$= \frac{\overline{z\varphi_1^{(l)}(z)}(\bar{\alpha}_{l-1}\varphi_2^{(l-1)}(z') + \varphi_2^{(l-2)}(z')) - (\varphi_1^{(l+1)}(z') - \alpha_{l+1}\varphi_1^{(l)}(z'))\overline{z\varphi_2^{(l-1)}(z)}}{(1-z'\bar{z})}. \tag{5.70}$$

Las fórmulas (5.66) y (5.69) se dedujeron en [36]. Sin embargo, los autores utilizan una sucesión de polinomios ortonormales en vez de polinomios mónicos y sus duales. Las otras expresiones son, hasta donde sabemos, originales.

5.2. Orden CMV extendido y polinomios ortogonales de Laurent

Esta sección está dedicada a la extensión de la ordenación CMV que permite aplicar sus resultados a situaciones más generales. El resultado principal es una extensión de la fórmula de Christoffel-Darboux, que permite proyectar en otros espacios de polinomios de Laurent, evitando las restricciones a los grados impuestas por la ordenación CMV clásica.

5.2.1. Orden CMV extendido

Consideremos un vector $\vec{n} \in \mathbb{Z}_+^2$, $\vec{n} = (n_+, n_-)$, y la sucesión alternada con n_+ potencias positivas en orden creciente de z seguida por n_- potencias negativas decrecientes de z, es decir

$$\chi_{\vec{n}}(z) := (1, z, \dots, z^{n_+-1}, z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-n_-}, z^{n_+}, z^{n_++1} \dots,)^\top. \tag{5.71}$$

El caso CMV presentado antes representa la elección particular $n_+ = n_- = 1$. Dado $l \geq 0$ si $\chi_{\vec{n}}^{(l)}$ es una potencia no negativa de z decimos que $a(l) = 1$ y si $\chi_{\vec{n}}^{(l)}$ es una potencia negativa de z entonces definimos $a(l) = 2$. Además, para cualquier $l \geq 0$ llamaremos $\nu_+(l)$ al cardinal del conjunto (finito) $\{\chi_{\vec{n}}^{(l')}, 0 \leq l' \leq l\}$ con $a(l') = 1$. Análogamente llamaremos $\nu_-(l)$ al cardinal del conjunto $\{\chi_{\vec{n}}^{(l')}, 0 \leq l' \leq l\}$ con $a(l') = 2$, es decir

$$\nu_+(l) := \#\{\chi_{\vec{n}}^{(l')}, a(l') = 1, 0 \leq l' \leq l\}, \qquad \nu_-(l) := \#\{\chi_{\vec{n}}^{(l')}, a(l') = 2, 0 \leq l' \leq l\}. \tag{5.72}$$

Usaremos la notación habitual

$$\vec{\nu} = (\nu_+, \nu_-), \qquad |\vec{\nu}| := \nu_+ + \nu_-, \qquad |\vec{n}| := n_+ + n_-. \tag{5.73}$$

Se pueden encontrar expresiones adicionales para (5.72) utilizando la división euclídea como hemos hecho en los capítulos 3 y 4. Para cualquier $l \geq 0$ existen enteros no negativos $q(l)$ y $r(l)$ tal que

$$\begin{aligned} l &= q(l)|\vec{n}| + r(l), & 0 &\leq r(l) < n_+, & &\text{si} \quad a(l) = 1, \\ l &= q(l)|\vec{n}| + n_+ + r(l), & 0 &\leq r(l) < n_-, & &\text{si} \quad a(l) = 2, \end{aligned}$$

de forma que

$$\nu_+(l) = \begin{cases} q(l)n_+ + r(l) + 1, & a(l) = 1, \\ (q(l)+1)n_+, & a(l) = 2, \end{cases} \qquad \nu_-(l) = \begin{cases} q(l)n_-, & a(l) = 1, \\ q(l)n_- + r(l) + 1, & a(l) = 2, \end{cases}$$

de donde $|\vec{\nu}(l)| = l + 1$.

Si $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ es la base canónica formal de $\mathbb{R}^{\infty}$ consideramos $\{e_a(k)\}_{k=0}^{\infty}$, con $a = 1, 2$, definido como

$$e_1(\nu_+(l) - 1) := e_l, \qquad e_2(\nu_-(l) - 1) := e_l. \tag{5.74}$$

Estas son nuevas etiquetas para $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ adaptadas a $\vec{n}$. Dado un entero no negativo l existe un único entero no negativo k y un $a \in \{1, 2\}$ tal que $e_a(k) = e_l$. Esta base permite la descomposición natural de $\chi_{\vec{n}}$ usando potencias positivas y negativas. En particular

$$\chi_{\vec{n},a}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} e_a(k) z^k, \qquad a = 1, 2, \qquad \chi_{\vec{n}} = \chi_{\vec{n},1} + \chi_{\vec{n},2}^{*}.$$

Con estas sucesiones definimos la matriz de momentos CMV extendida

Definición 5.33. La matriz de momentos CMV extendida $g_{\vec{n}}$ es la siguiente matriz semi-infinita

$$g_{\vec{n}} := \oint_{\mathbb{T}} \chi_{\vec{n}}(z) \chi_{\vec{n}}(z)^{\dagger} d\mu(z). \tag{5.75}$$

Esta matriz de momentos es una matriz hermítica definida positiva si μ es positiva. La factorización gaussiana para esta matriz semi-infinita es

$$g_{\vec{n}} = S_{\vec{n}}^{-1} \tilde{S}_{\vec{n}},$$

con las normalizaciones clásicas de $S_{\vec{n}}$, y $\tilde{S}_{\vec{n}}$.

La sucesión de polinomios Laurent asociada a esta factorización es la siguiente

$$\Phi_{\vec{n},1}(z) := S_{\vec{n}} \chi_{\vec{n}}(z), \qquad \Phi_{\vec{n},2}(z) := (\tilde{S}_{\vec{n}}^{-1})^{\dagger} \chi_{\vec{n}}(z), \tag{5.76}$$

donde

$$\Phi_{\vec{n},1}(z) = \begin{pmatrix} \varphi_{\vec{n},1}^{(0)}(z) \\ \varphi_{\vec{n},1}^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{\vec{n},2}(z) = \begin{pmatrix} \varphi_{\vec{n},2}^{(0)}(z) \\ \varphi_{\vec{n},2}^{(1)}(z) \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{5.77}$$

Al igual que ocurría en caso CMV, los conjuntos de polinomios de Laurent $\{\varphi_{\vec{n},1}^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$ y $\{\varphi_{\vec{n},2}^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$ son bi-ortogonales con respecto a la forma sesquilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}$, es decir

$$\langle \varphi_{\vec{n},1}^{(l)}, \varphi_{\vec{n},2}^{(k)} \rangle_{\mathscr{L}} = \oint_{\mathbb{T}} \varphi_{\vec{n},1}^{(l)}(z) \bar{\varphi}_{\vec{n},2}^{(k)}(z^{-1}) d\mu(z) = \delta_{l,k}, \qquad l, k = 0, 1, \dots. \tag{5.78}$$

Adicionalmente si la medida μ es positiva tenemos que $\varphi_{\vec{n},2}^{(l)} = h_l^{-1} \varphi_{\vec{n},1}^{(l)}$ y por lo tanto ambas familias son polinomios de Laurent proporcionales. Además

$$\langle \varphi_{\vec{n},1}^{(l)}, \varphi_{\vec{n},1}^{(k)} \rangle_{\mathscr{L}} = \oint_{\mathbb{T}} \varphi_{\vec{n},1}^{(l)}(z) \bar{\varphi}_{\vec{n},1}^{(k)}(z^{-1}) d\mu(z) = \delta_{l,k} h_l, \qquad l, k = 0, 1, \dots. \tag{5.79}$$

entonces en este caso $\{\varphi^{(l)}_{\vec{n},1}\}_{l=0}^{\infty}$ es un conjunto de polinomios ortogonales de Laurent con $\varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(z) \in \Lambda_{[\nu_-(l),\nu_+(l)-1]}$. Las relaciones de ortogonalidad (5.79) son como sigue

$$\langle \varphi^{(l)}_{\vec{n},1}, z^k \rangle_{\mathscr{L}} = \oint_{\mathbb{T}} \varphi^{(l)}_{1,\vec{n}}(z) z^{-k} d\mu(z) = 0, \quad k = -\nu_-(l-1), \dots, \nu_+(l-1) - 1. \tag{5.80}$$

Estos polinomios son proporcionales a los polinomios de Szegő al igual que ocurría con los polinomios CMV. Esto lo concretamos en la siguiente proposición

Proposición 5.34. *Para una medida positiva μ se dan las siguientes identificaciones entre los polinomios de Laurent extendidos, los polinomios de Szegő y sus recíprocos*

$$\begin{aligned} z^{\nu_-(l)} \varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(z) &= P_l(z), & a(l) &= 1, \\ z^{\nu_-(l)} \varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(z) &= P_l^*(z), & a(l) &= 2. \end{aligned}$$

Demostración. Si $a(l) = 1$ entonces $z^{\nu_-(l)}\varphi_1^{(l)}(z)$ es un polinomio mónico de grado $\nu_-(l) + \nu_+(l) - 1$, mientras que cuando $a(l) = 2$ entonces $z^{\nu_+(l)-1}\bar{\varphi}_1^{(l)}(z^{-1})$ es un polinomio mónico de grado $\nu_-(l) + \nu_+(l) - 1$. Las relaciones de ortogonalidad para $z^{\nu_-(l)}\varphi_1^{(l)}(z)$ y $z^{\nu_+(l)-1}\bar{\varphi}_1^{(l)}(z^{-1})$ se pueden obtener de (5.80)

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbb{T}} z^{\nu_-(l)} \varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(z) z^{-k} d\mu(z) &= 0, \quad k = 0, \dots, |\vec{\nu}(l)| - 1, \quad a(l) = 1, \\ \oint_{\mathbb{T}} z^{\nu_+(l)-1} \bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},1}(z^{-1}) z^{-k} d\mu(z) &= 0, \quad k = 0, \dots, |\vec{\nu}(l)| - 1, \quad a(l) = 2, \end{aligned} \tag{5.81}$$

lo que quiere decir que

$$\begin{aligned} z^{\nu_-(l)} \varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(z) &= P_{|\vec{\nu}(l)|-1}(z), & a(l) &= 1, \\ z^{\nu_+(l)-1} \bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},1}(z^{-1}) &= P_{|\vec{\nu}(l)|-1}(z), & a(l) &= 2, \end{aligned}$$

y recordando que $|\vec{\nu}(l)| - 1 = l$ se obtiene el resultado deseado. □

El caso CMV equivale a la elección $n_+ = n_- = 1$. Para este caso si $l = 2k$ tenemos $a(l) = 1$, $\nu_-(l) = k$ y $\nu_+(l) = k + 1$, y cuando $l = 2k + 1$ entonces $a(l) = 2$, $\nu_-(l) = \nu_+(l) = k + 1$.

5.2.2. Funciones de segunda especie

Aquí damos una breve descripción en el caso extendido porque no aporta ninguna novedad significativa respecto a los resultados que se obtienen con la ordenación clásica CMV

Definición 5.35. Las sucesiones parciales de segunda especie extendidas están dadas por

$$C_{\vec{n},1}(z) := (S_{\vec{n}}^{-1})^\dagger \chi^*_{\vec{n},1}(z), \qquad C_{\vec{n},2}(z) := (S_{\vec{n}}^{-1})^\dagger \chi_{\vec{n},2}(z), \tag{5.82}$$

$$\tilde{C}_{\vec{n},1}(z) := \tilde{S}_{\vec{n}} \chi^*_{\vec{n},1}(z), \qquad \tilde{C}_{\vec{n},2}(z) := \tilde{S}_{\vec{n}} \chi_{\vec{n},2}(z). \tag{5.83}$$

y las sucesiones de segunda especie por

$$C_{\vec{n}}(z) := (S_{\vec{n},}^{-1})^\dagger \chi^*_{\vec{n}}(z), \qquad \tilde{C}_{\vec{n}}(z) := \tilde{S}_{\vec{n}} \chi^*_{\vec{n}}(z). \tag{5.84}$$

Se pueden obtener fórmulas generalizadas en términos de determinantes

Proposición 5.36. *Las funciones extendidas de segunda especie tienen las siguientes expresiones que emplean determinantes para $l \geq 1$.*

$$\overline{C_{\vec{n}}^{(l)}(z)} = \frac{1}{\det g_{\vec{n}}^{[l+1]}} \det \begin{pmatrix} g_{\vec{n},0,0} & g_{\vec{n},0,1} & \cdots & g_{\vec{n},0,l} \\ g_{\vec{n},1,0} & g_{\vec{n},1,1} & \cdots & g_{\vec{n},1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{\vec{n},l-1,0} & g_{\vec{n},l-1,1} & \cdots & g_{\vec{n},l-1,l} \\ \hline \overline{\tilde{\Gamma}_{\vec{n},0}^{(l)}} & \overline{\tilde{\Gamma}_{\vec{n},1}^{(l)}} & \cdots & \overline{\tilde{\Gamma}_{\vec{n},2,l}^{(l)}} \end{pmatrix}, \tag{5.85}$$

y

$$\tilde{C}_{\vec{n}}^{(l)}(z) = \frac{1}{\det g_{\vec{n}}^{[l]}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{\vec{n},0,0} & g_{\vec{n},0,1} & \cdots & g_{\vec{n},0,l-1} & \Gamma_{\vec{n},0}^{(l)} \\ g_{\vec{n},1,0} & g_{\vec{n},1,1} & \cdots & g_{\vec{n},1,l-1} & \Gamma_{\vec{n},1}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{\vec{n},l,0} & g_{\vec{n},l,1} & \cdots & g_{\vec{n},l,l-1} & \Gamma_{\vec{n},l}^{(l)} \end{array}\right), \tag{5.86}$$

donde $\Gamma_{\vec{n},j}^{(l)} := \sum_{k\geq l} g_{\vec{n},jk}\chi_{\vec{n}}^{*(k)}$ *y* $\tilde{\Gamma}_{\vec{n},j}^{(l)} := \sum_{k\geq l} g_{\vec{n},jk}^{\dagger}\chi_{\vec{n}}^{*(k)}$.

Se puede decir lo mismo sobre la relación entre las funciones de segunda especie, la serie de Fourier de la medida y su representación integral

Proposición 5.37. *Las funciones parciales de segunda especie se pueden expresar como*

$$C_{\vec{n},1}^{(l)} = 2\pi \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{\vec{n},2,k}^{(l)} z^{-k-1} \bar{F}_{\mu,-k-1}^{(-)}(z), \qquad R_- < |z| < \infty \tag{5.87}$$

$$C_{\vec{n},2}^{(l)} = 2\pi \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{\vec{n},2,k}^{(l)} z^{-k-1} \bar{F}_{\mu,-k-1}^{(+)}(z), \qquad 0 < |z| < R_+ \tag{5.88}$$

$$\tilde{C}_{\vec{n},1}^{(l)} = 2\pi \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{\vec{n},1,k}^{(l)} z^{-k-1} F_{\mu,k}^{(+)}(z^{-1}), \qquad R_+^{-1} < |z| < \infty \tag{5.89}$$

$$\tilde{C}_{\vec{n},2}^{(l)} = 2\pi \sum_{|k|\ll\infty} \varphi_{\vec{n},1,k}^{(l)} z^{-k-1} F_{\mu,k}^{(-)}(z^{-1}), \qquad 0 < |z| < R_-^{-1} \tag{5.90}$$

y las funciones de segunda especie como

$$C_{\vec{n}}^{(l)} = 2\pi\varphi_{\vec{n},2}^{(l)}(z^{-1})z^{-1}\bar{F}_{\mu}(z), \qquad R_- < |z| < R_+ \tag{5.91}$$

$$\tilde{C}_{\vec{n}}^{(l)} = 2\pi\varphi_{\vec{n},1}^{(l)}(z^{-1})z^{-1}F_{\mu}(z^{-1}) \qquad R_+^{-1} < |z| < R_-^{-1}. \tag{5.92}$$

Por último tenemos la representación en términos de transformadas de Cauchy

Proposición 5.38. *Si cosideramos una medida positiva μ o una medida compleja $w(\theta)d\theta$ con una función continua w. Entonces las funciones de segunda especie se pueden escribir como las siguientes integrales de tipo Cauchy.*

$$C_{\vec{n},1}^{(l)} = z^{-1} \oint_{\mathbb{T}} \frac{u\varphi_{\vec{n},2}^{(l)}(u)}{u-z^{-1}} \overline{d\mu(u)}, \qquad \tilde{C}_{\vec{n},1}^{(l)} = z^{-1} \oint_{\mathbb{T}} \frac{u\varphi_{\vec{n},1}^{(l)}(u)}{u-z^{-1}} d\mu(u), \qquad |z| > 1, \tag{5.93}$$

$$C_{\vec{n},2}^{(l)} = -z^{-1} \oint_{\mathbb{T}} \frac{u\varphi_{\vec{n},2}^{(l)}(u)}{u-z^{-1}} \overline{d\mu(u)}, \qquad \tilde{C}_{\vec{n},2}^{(l)} = -z^{-1} \oint_{\mathbb{T}} \frac{u\varphi_{\vec{n},1}^{(l)}(u)}{u-z^{-1}} d\mu(u), \qquad |z| < 1. \tag{5.94}$$

5.2.3. Relaciones de recurrencia

Como ya comentamos antes, las relaciones de recurrencia entre los polinomios de Laurent extendidos son más complicadas que en el caso clásico CMV.

Definición 5.39. Dado un $\vec{n} \in \mathbb{Z}_+^2$ definimos las proyecciones

$$\Pi_{\vec{n},a} := \sum_{k=0}^{\infty} e_a(k) e_a(k)^\top, \qquad a = 1, 2, \tag{5.95}$$

y las matrices de traslación

$$\Lambda_{\vec{n},a} := \sum_{k=0}^{\infty} e_a(k) e_a(k+1)^\top, \tag{5.96}$$

$$\Upsilon_{\vec{n}} := \Lambda_{\vec{n},1} + \Lambda_{\vec{n},2}^\top + E_{n_+,n_+} (\Lambda^\top)^{n_+}. \tag{5.97}$$

Con esos elementos nuestro objetivo es hallar una expresión para la multiplicación por z y por z^{-1} usando los operadores de traslación.

Proposición 5.40. *1. La matriz de momentos $g_{\vec{n}}$ tiene la siguiente simetría*

$$\Upsilon_{\vec{n}} g_{\vec{n}} = g_{\vec{n}} \Upsilon_{\vec{n}}. \tag{5.98}$$

2. El operador de multiplicación por z tiene una estructura con $|\vec{n}| + 3$ bandas diagonales en la base formada por $\Phi_{\vec{n},1}$ o por $\Phi_{\vec{n},2}$.

Demostración. Idéntica a la de la proposición 5.17 estudiando la estructura particular de las matrices de traslación para este caso. □

Ahora introducimos los enteros asociados equivalentes a los del capítulo 4. Para $a = 1, 2$ llamamos l_{+a} y l_{-a} al entero más pequeño (más grande) l' que verifica $l' \geq l$ ($l' \leq l$) y $a(l') = a$. Por ejemplo, en el caso anterior con $n_+ = n_- = 1$, si l es un número par $l_{+1} = l_{-1} = l$, $l_{+2} = l+1$, y $l_{-2} = l - 1$, en el caso de que l sea un número impar entonces $l_{+2} = l_{-2} = l$, $l_{+1} = l + 1$, y $l_{-1} = l - 1$. Esta estructura conduce a las siguientes relaciones de recurrencia para $k \geq 1$ y $0 \leq l \leq |\vec{n}| - 1$ (el caso $k = 0$ corresponde a las relaciones truncadas).

$$z\varphi_{\vec{n},1}^{(|\vec{n}|k+l)} = J_{\vec{n},0}^{l}(k)\varphi_{\vec{n},1}^{((|\vec{n}|k+l+1)_{+1})} + J_{\vec{n},1}^{l}(k)\varphi_{\vec{n},1}^{((|\vec{n}|k+l+1)_{+1}-1)} + \cdots + J_{\vec{n},m_{\vec{n}}(l)-1}^{l}(k)\varphi_{\vec{n},1}^{((|\vec{n}|k+l-1)_{-2})},$$

donde $m_{\vec{n}}(l)$ es el número de términos no nulos en la fórmula de recurrencia.

Los coeficientes $J_{\vec{n},j}^{l}(k)$ están etiquetados con el índice j que tiene en cuenta los $m_{\vec{n}}(l)$ coeficientes no nulos para cada l. Como solo hay $|\vec{n}|$ recurrencias "distintas" (el equivalente a los casos par e impar anteriores) entonces $l = 0, 1, \ldots |\vec{n}| - 1$. La conexión con los elementos de la matriz del operador de Jacobi es la siguiente $J_{\vec{n},j}^{l}(k) = J_{\vec{n},|\vec{n}|k+l,(|\vec{n}|k+l)_{+1}-j}$.

El lector puede comprobar que $m_{\vec{n}}(l) = (|\vec{n}|k + l + 1)_{+1} - (|\vec{n}|k + l - 1)_{-2} + 1$. Debido al hecho de que $(|\vec{n}|k + l + 1)_{+1} \leq |\vec{n}|k + l + n_- + 1$ y que $(|\vec{n}|k + l - 1)_{-2} \geq |\vec{n}|k + l - 1 - n_+$ entonces $m_{\vec{n}}(l) \leq |\vec{n}| + 3$, lo que está de acuerdo con la estructura de $|\vec{n}| + 3$ diagonales. Además es posible calcular $m_{\vec{n}}(l)$ más explícitamente y mostrar que de hecho no depende de k. Podemos ver que

$$(|\vec{n}|k + l + 1)_{+1} = \begin{cases} |\vec{n}|k + l + 1, & 0 \leq l \leq n_+ - 2, \\ |\vec{n}|(k+1), & n_+ - 1 \leq l \leq |\vec{n}| - 1, \end{cases}$$

$$(|\vec{n}|k+l-1)_{-2} = \begin{cases} |\vec{n}|k-1, & 0 \leq l \leq n_+, \\ |\vec{n}|k+l-1 & n_+ + 1 \leq l \leq |\vec{n}|-1, \end{cases}$$

y consecuentemente

$$m_{\vec{n}}(l) = \begin{cases} l+3 & l = 0,\dots,n_+ - 2, \\ |\vec{n}|+2 & l = n_+ - 1, n_+, \\ |\vec{n}| - l + 2 & l = n_+ + 1,\dots,|\vec{n}|-1, \end{cases}$$

así que de hecho $m_{\vec{n}}(l) \leq |\vec{n}|+2$.

Las expresiones para los coeficientes $J^l_{\vec{n},p}(k)$ con $l = 0,\dots,n_+$ son las siguientes

$$J^l_{\vec{n},p}(k) = \begin{cases} (S^{-1}_{\vec{n}})_{(|\vec{n}|k+l+1)_{+1},(|\vec{n}|k+l+1)_{+1}-p} & p = 0,\dots,(|\vec{n}|k+l+1)_{+1} - (|\vec{n}|k+l) - 1 \\ (\tilde{S}^{-1}_{\vec{n}})_{|\vec{n}|k+l,(|\vec{n}|k+l)_{+2}} (\tilde{S}^{-1}_{\vec{n}})^{-1}_{(|\vec{n}|k+l)_{-2},(|\vec{n}|k+l+1)_{+1}-p} & p = (|\vec{n}|k+l+1)_{+1} - (|\vec{n}|k+l),\dots,m_{\vec{n}}(l)-1, \end{cases}$$

y para $l = n_+,\dots,|\vec{n}|-1$, las expresiones son

$$J^l_{\vec{n},p}(k) = \begin{cases} (S^{-1}_{\vec{n}})_{|\vec{n}|k+l,(|\vec{n}|k+l)_{-1}} (S^{-1}_{\vec{n}})_{(|\vec{n}|k+l)_{+1},(|\vec{n}|k+l)_{+1}-p} & p = 0,\dots,(|\vec{n}|k+l)_{+1} - (|\vec{n}|k+l) \\ (h_{\vec{n}})_{|\vec{n}|k+l} (\tilde{S}^{-1}_{\vec{n}})_{(|\vec{n}|k+l-1)_{-2},(|\vec{n}|k+l)_{+1}-p} & p = (|\vec{n}|k+l+1)_{+1} - (|\vec{n}|k+l+1)\dots,m_{\vec{n}}(l)-1. \end{cases}$$

El caso particular de $n_- = n_+ = 1$ da la estructura de cinco diagonales de tipo CMV con cuatro coeficientes distintos de cero. Como consecuencia el caso CMV estándar tiene la fórmula de recurrencia más corta.

5.2.4. La fórmula de Christoffel-Darboux

Ahora discutimos la generalización de la obtención de fórmulas para el núcleo de Christoffel-Darboux en este caso extendido.

Definición 5.41. Para cada entero no negativo l definimos un conjunto de polinomios de Laurent truncados como el siguiente espacio

$$\Lambda^{[l]}_{\vec{n}} := \mathbb{C}\{\chi^{(0)}_{\vec{n}},\dots,\chi^{(l-1)}_{\vec{n}}\} = \Lambda_{[\nu_-(l-1),\nu_+(l-1)-1]}. \tag{5.99}$$

Al igual que antes, definimos espacios *cuasi-ortogonales*

$$(\Lambda^{[l]}_{\vec{n}})^{\perp_1} := \Big\{ \sum_{l\leq k \ll \infty} c_k \varphi^{(k)}_{\vec{n},2}, c_k \in \mathbb{C} \Big\}, \qquad (\Lambda^{[l]}_{\vec{n}})^{\perp_2} := \Big\{ \sum_{l\leq k \ll \infty} c_k \varphi^{(k)}_{\vec{n},1}, c_k \in \mathbb{C} \Big\}, \tag{5.100}$$

de modo que se satisfagan las relaciones

$$\langle \Lambda^{[l]}_{\vec{n}}, (\Lambda^{[l]}_{\vec{n}})^{\perp_1} \rangle_{\mathscr{L}} = 0, \qquad \langle (\Lambda^{[l]}_{\vec{n}})^{\perp_2}, \Lambda^{[l]}_{\vec{n}} \rangle_{\mathscr{L}} = 0. \tag{5.101}$$

Igualmente definimos las correspondientes descomposiciones

$$\Lambda_{[\infty]} = \Lambda^{[l]}_{\vec{n}} \oplus (\Lambda^{[l]}_{\vec{n}})^{\perp_1} = \Lambda^{[l]}_{\vec{n}} \oplus (\Lambda^{[l]}_{\vec{n}})^{\perp_2}, \tag{5.102}$$

que inducen las proyecciones

$$\pi^{(l)}_{\vec{n},1} : \Lambda_{[\infty]} \to \Lambda^{[l]}_{\vec{n}}, \qquad \pi^{(l)}_{\vec{n},2} : \Lambda_{[\infty]} \to \Lambda^{[l]}_{\vec{n}}. \tag{5.103}$$

Esta versión extendida permite proyectar en espacios más generales de polinomios truncados. Hay que recordar que para el caso CMV el espacio de polinomios truncados dado en (5.47) incluye solo una forma particular de truncar, excluyendo la mayoría de los casos. La introducción de la ordenación extendida permite discutir todas las formas posibles de truncar. De hecho el espacio $\Lambda_{[p,q]}$ se puede alcanzar de diversos modos, y siempre por la elección $n_+ = q+1$, $n_- = p$ (al igual que la elección de escaleras en el capítulo 4).

Definición 5.42. El núcleo de Christoffel-Darboux es

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') := \sum_{k=0}^{l-1} \varphi_{\vec{n},1}^{(k)}(z')\bar{\varphi}_{\vec{n},2}^{(k)}(\bar{z}), \tag{5.104}$$

y, cuando la medida μ es definida positiva, tenemos las expresiones equivalentes

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = \sum_{k=0}^{l-1} h_k^{-1}\varphi_{\vec{n},1}^{(k)}(z')\bar{\varphi}_{\vec{n},1}^{(k)}(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{l-1} h_k\varphi_{\vec{n},2}^{(k)}(z')\bar{\varphi}_{\vec{n},2}^{(k)}(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{\varphi}_{\vec{n}}^{(k)}(z')\overline{\tilde{\varphi}_{\vec{n}}^{(k)}(z)}. \tag{5.105}$$

Procediendo como en la ordenación CMV concluimos el siguiente resultado

Proposición 5.43. *1. El núcleo de la representación integral de las proyecciones $\pi_{\vec{n},1}^{(l)}$, $\pi_{\vec{n},2}^{(l)}$ es el de Christoffel-Darboux y viene dado por las siguientes expresiones*

$$\begin{aligned}(\pi_{\vec{n},1}^{(l)}f)(z') &= \oint_{\mathbb{T}} K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z')f(z)d\mu(z), \quad \forall f\in\Lambda_{[\infty]},\\ \overline{(\pi_{\vec{n},2}^{(l)}f)(z)} &= \oint_{\mathbb{T}} K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z')\bar{f}(\bar{z}')d\mu(z'), \quad \forall f\in\Lambda_{[\infty]}.\end{aligned} \tag{5.106}$$

2. El núcleo de Christoffel-Darboux $K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z')$ tiene la siguiente propiedad reproductiva

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = \oint_{\mathbb{T}} K_{\vec{n}}^{[l]}(z,u)K_{\vec{n}}^{[l]}(u,z')d\mu(u). \tag{5.107}$$

3. Se verifica la siguiente versión del teorema ABC

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = \chi_{\vec{n}}^{[l]}(z)^{\dagger}(g_{\vec{n}}^{[l]})^{-1}\chi_{\vec{n}}^{[l]}(z'). \tag{5.108}$$

4. El núcleo de Christoffel-Darboux tiene la siguiente expresión en función de los bloques de $g_{\vec{n}}$ y $\Upsilon_{\vec{n}}$.

$$\begin{aligned}(z'-\bar{z}^{-1})K^{[l]}(z,z') &= \chi_{\vec{n}}^{[l]}(z)^{\dagger}(g_{\vec{n}}^{[l]})^{-1}z'\chi_{\vec{n}}^{[l]}(z') - \bar{z}^{-1}\chi_{\vec{n}}^{[l]}(z)^{\dagger}(g_{\vec{n}}^{[l]})^{-1}\chi_{\vec{n}}^{[l]}(z')\\ &= (\chi_{\vec{n}}^{[l]}(z)^{\dagger}(g_{\vec{n}}^{[l]})^{-1}g_{\vec{n}}^{[l,\geq l]} - \chi_{\vec{n}}^{[\geq l]}(z)^{\dagger})\Upsilon_{\vec{n}}^{[\geq l,l]}(g_{\vec{n}}^{[l]})^{-1}\chi_{\vec{n}}^{[l]}(z') -\\ &\quad - \chi_{\vec{n}}^{[l]}(z)^{\dagger}(g_{\vec{n}}^{[l]})^{-1}\Upsilon_{\vec{n}}^{[l,\geq l]}(g_{\vec{n}}^{[\geq l,l]}(g_{\vec{n}}^{[l]})^{-1}\chi_{\vec{n}}^{[l]}(z') - \chi_{\vec{n}}^{[\geq l]}(z')).\end{aligned}$$

Los enteros $l_{\pm a}$ se pueden usar para calcular la estructura de los bloques Υ en este caso, lo que es necesario para la fórmula final. Tenemos entonces que

Proposición 5.44. *La fórmula para $\Upsilon_{\vec{n}}$ es la siguiente*

$$\Upsilon_{\vec{n}}^{[l,\geq l]} = e_{(l-1)_{-1}}e_{l_{+1}-l}^{\top}, \qquad \Upsilon_{\vec{n}}^{[\geq l,l]} = e_{l_{+2}-l}e_{(l-1)_{-2}}^{\top}. \tag{5.109}$$

Por lo tanto, la expresión del núcleo de Christoffel-Darboux es

$$\begin{aligned}(\bar{z}^{-1}-z')K^{[l]}_{\vec{n}}(z,z')=(\chi^{[\geq l]}_{\vec{n}}(z)^\dagger-\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z)^\dagger(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}g^{[l,\geq l]}_{\vec{n}})e_{l_{+2}-l}e^\top_{(l-1)_{-2}}(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z')-\\ -\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z)^\dagger(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}e_{(l-1)_{-1}}e^\top_{l_{+1}-l}(\chi^{[\geq l]}_{\vec{n}}(z')-g^{[\geq l,l]}_{\vec{n}}(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z')),\end{aligned}\tag{5.110}$$

y esto sugiere la definición de los siguientes polinomios asociados

Definición 5.45. Los polinomios asociados de Laurent se definen como

$$\begin{aligned}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+a}&:=\chi^{(l_{+a})}_{\vec{n}}-\begin{pmatrix}g_{\vec{n},l_{+a},0} & g_{\vec{n},l_{+a},1} & \cdots & g_{\vec{n},l_{+a},l-1}\end{pmatrix}(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}\chi^{[l]}_{\vec{n}},\\ \varphi^{(l)}_{\vec{n},1,-a}&:=e^\top_{l_{-a}}(g^{[l+1]}_{\vec{n}})^{-1}\chi^{[l+1]}_{\vec{n}},\\ \varphi^{(l)}_{\vec{n},2,+a}&:=\chi^{(l_{+a})}_{\vec{n}}-\begin{pmatrix}\bar{g}_{\vec{n},0,l_{+a}} & \bar{g}_{\vec{n},1,l_{+a}} & \cdots & \bar{g}_{\vec{n},l-1,l_{+a}}\end{pmatrix}((g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1})^\dagger\chi^{[l]}_{\vec{n}},\\ \varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-a}&:=e^\top_{l_{-a}}((g^{[l+1]}_{\vec{n}})^{-1})^\dagger\chi^{[l+1]}_{\vec{n}},\end{aligned}$$

donde $a=1,2$.

Es fácil ver que $\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+a(l)}=\varphi^{(l)}_{\vec{n},1}, \varphi^{(l)}_{\vec{n},2,+a(l)}=(\bar{S}_2)_{ll}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2}$,$\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,-a(l)}=(S_2)^{-1}_{ll}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1}$ y $\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-a(l)}=\varphi^{(l)}_{\vec{n},2}$.

Teorema 5.46. *Para el caso de los polinomios de Laurent asociados $\varphi^{(l)}_{\vec{n},+a},\varphi^{(l)}_{\vec{n},-a}$ tenemos dos expresiones alternativas*

1. *Las fórmulas de tipo recíproco (válidas en el caso hermítico)*

$$\begin{aligned}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+2}(z)=\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,+2}(z)=z^{\nu_+(l)-\nu_-(l)-2}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},1}(z^{-1}),\\ \varphi^{(l)}_{\vec{n},1,-2}(z)=\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-2}(z)=z^{\nu_+(l)-\nu_-(l)-1}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},2}(z^{-1}),\end{aligned}\tag{5.111}$$

cuando $a(l)=1$ y

$$\begin{aligned}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+1}(z)=\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,+1}(z)=z^{\nu_+(l)-\nu_-(l)}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},1}(z^{-1}),\\ \varphi^{(l)}_{\vec{n},1,-1}(z)=\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-1}(z)=z^{\nu_+(l)-\nu_-(l)-1}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},2}(z^{-1}),\end{aligned}\tag{5.112}$$

para $a(l)=2$.

2. *La forma de tipo combinación lineal (válida también para los casos cuasi-definidos)*

$$\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+a}=(S_1^{-1})_{l_{+a},l_{+a}}\varphi^{(l_{+a})}_{\vec{n},1}+(S_1^{-1})_{l_{+a},l_{+a}-1}\varphi^{(l_{+a}-1)}_{\vec{n},1}+\cdots+(S_1^{-1})_{l_{+a},l}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1},\tag{5.113}$$

$$\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,+a}=(\bar{S}_2)_{l_{+a},l_{+a}}\varphi^{(l_{+a})}_{\vec{n},2}+(\bar{S}_2)_{l_{+a}-1,l_{+a}}\varphi^{(l_{+a}-1)}_{\vec{n},2}+\cdots+(\bar{S}_2)_{l,l_{+a}}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2},\tag{5.114}$$

$$\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,-a}=(S_2^{-1})_{l_{-a},l_{-a}}\varphi^{(l_{-a})}_{\vec{n},1}+(S_2^{-1})_{l_{-a},l_{-a}+1}\varphi^{(l_{-a}+1)}_{\vec{n},1}+\cdots+(S_2^{-1})_{l_{-a},l}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1},\tag{5.115}$$

$$\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-a}=(\bar{S}_1)_{l_{-a},l_{-a}}\varphi^{(l_{-a})}_{\vec{n},2}+(\bar{S}_1)_{l_{-a}+1,l_{-a}}\varphi^{(l_{-a}+1)}_{\vec{n},2}+\cdots+(\bar{S}_1)_{l,l_{-a}}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2}.\tag{5.116}$$

Demostración. 1. Supongamos que $a(l)=1$. En este caso tenemos $\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+1}=\varphi^{(l)}_{\vec{n},1}$ y $\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+2}\in\Lambda_{[\nu_-(l)+1,\nu_+(l)-2]}$. Consecuentemente, $z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)+2}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+2}\in\Lambda_{[\nu_+(l)-1,\nu_-(l)]}$ y $a(l)=1$, $\nu_+(l)=\nu_+(l-1)+1$, $\nu_-(l)=\nu_-(l-1)$.

Para los polinomios duales $\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-1}=\varphi^{(l)}_{\vec{n},2}$ y $\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-2}\in\Lambda_{[\nu_-(l),\nu_+(l)-1]}$, por lo tanto tenemos en este caso que $z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)+1}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-2}\in\Lambda_{[\nu_+(l)-1,\nu_-(l)]}$.

Usando (5.117) concluimos que se satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathbb{T}} z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)+2}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+2}(z)z^{-k}d\mu(z) &= 0, \qquad k = -\nu_+(l-1)+1,\dots,\nu_-(l-1),\\
\oint_{\mathbb{T}} z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)+1}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-2}(z)z^{-k}d\mu(z) &= 0, \qquad k = -\nu_+(l-1)+1,\dots,\nu_-(l-1),\\
\oint_{\mathbb{T}} z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)+1}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-2}(z)z^{\nu_+(l-1)}d\mu(z) &= 1,
\end{aligned}
$$

y obtenemos el resultado deseado.

Ahora supongamos que $a(l) = 2$. En este caso tenemos que $\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+2} = \varphi^{(l)}_{\vec{n},1}$ y $\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+1} \in \Lambda_{[\nu_-(l)-1,\nu_+(l)]}$, consecuentemente, $z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+2} \in \Lambda_{[\nu_+(l)-1,\nu_-(l)]}$. Ahora, ya que $a(l) = 2$, tenemos que $\nu_+(l) = \nu_+(l-1)$ y $\nu_-(l) = \nu_-(l-1)+1$.

Para los polinomios duales $\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-2} = \varphi^{(l)}_{\vec{n},2}$ y $\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-1} \in \Lambda_{[\nu_-(l),\nu_+(l)-1]}$, de forma que se verifica que $z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)+1}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-1} \in \Lambda_{[\nu_+(l)-1,\nu_-(l)]}$.

Ahora, usando de nuevo (5.117) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathbb{T}} z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+1}(z)z^{-k}d\mu(z) &= 0, \quad k = -\nu_+(l-1)+1,\dots,\nu_-(l-1),\\
\oint_{\mathbb{T}} z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-1}(z)z^{-k}d\mu(z) &= 0, \quad k = -\nu_+(l-1)+1,\dots,\nu_-(l-1),\\
\oint_{\mathbb{T}} z^{\nu_-(l)-\nu_+(l)+1}\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-1}(z)z^{-\nu_-(l-1)-1}d\mu(z) &= 1.
\end{aligned}
$$

2. Para $\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+a}$ el cálculo directo da

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathbb{T}} \varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+a}(z)\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z)^\dagger d\mu(z) &= \oint_{\mathbb{T}} (\chi^{(l+a)}_{\vec{n}}(z) - \begin{pmatrix} g_{\vec{n},l_{+a},0} & g_{\vec{n},l_{+a},1} & \cdots & g_{\vec{n},l_{+a},l-1}\end{pmatrix}(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z))\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z)^\dagger d\mu(z)\\
&= \begin{pmatrix} g_{\vec{n},l_{+a},0} & g_{\vec{n},l_{+a},1} & \cdots & g_{\vec{n},l_{+a},l-1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{\vec{n},l_{+a},0} & g_{\vec{n},l_{+a},1} & \cdots & g_{\vec{n},l_{+a},l-1}\end{pmatrix}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

y para $\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-a}$ tenemos que

$$
\oint_{\mathbb{T}} \chi^{[l+1]}_{\vec{n}}(z)\bar{\varphi}_{\vec{n},2,-a}(\bar{z})d\mu(z) = \oint_{\mathbb{T}} \chi^{[l+1]}_{\vec{n}}(z)\chi^{[l+1]}_{\vec{n}}(z)^\dagger(g^{[l+1]}_{\vec{n}})^{-1}e_{l_{-a}}d\mu(z) = e_{l_{-a}},
$$

de modo que obtenemos relaciones de ortogonalidad para los polinomios asociados

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathbb{T}} \varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+a}(z)z^{-k}d\mu(z) &= 0, \qquad k = -\nu_-(l-1),\dots,\nu_+(l-1)-1,\\
\oint_{\mathbb{T}} \chi^{(k)}_{\vec{n}}(z)\bar{\varphi}_{\vec{n},2,-a}(\bar{z})d\mu(z) &= \delta_{k,l_{-a}}, \quad k = 0,1,\dots,l.
\end{aligned}
\tag{5.117}
$$

Por lo tanto,

$$
\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+a} \in \operatorname{span}\{\varphi^{(l)}_{\vec{n},1}, \varphi^{(l+1)}_{\vec{n},1}, \dots, \varphi^{(l+a)}_{\vec{n},1}\},
$$

es decir, $\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+a} = \sum_{j=l}^{l+a} A^{(l)}_j \varphi^{(j)}_{\vec{n},1}$ para un conjunto de coeficientes $\{A^{(l)}_j\}$.

Si comparamos las potencias de z que aparecen en la subsucesión $\{\chi^{(j)}\}_{l\leq j\leq l_{+a}}$ en ambos lados de la ecuación, se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ S_{l_{+a},l_{+a}-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ S_{l_{+a},l_{+a}-2} & S_{l_{+a}-1,l_{+a}-2} & 1 & 0 & 0 & 0\\ S_{l_{+a},l_{+a}-3} & S_{l_{+a}-1,l_{+a}-3} & \cdots & 1 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ S_{l_{+a},l} & S_{l_{+a}-1,l} & \cdots & S_{l+2,l} & S_{l+1,l} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(l)}_{l_{+a}}\\ A^{(l)}_{l_{+a}-1}\\ A^{(l)}_{l_{+a}-2}\\ A^{(l)}_{l_{+a}-3}\\ \vdots\\ A^{(l)}_{l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Si llamamos $\mathcal{M}$ a la matriz de coeficientes, la solución se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} A^{(l)}_{l_{+a}}\\ A^{(l)}_{l_{+a}-1}\\ \vdots\\ A^{(l)}_{l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\mathcal{M}^{-1})_{0,0}\\ (\mathcal{M}^{-1})_{1,0}\\ \vdots\\ (\mathcal{M}^{-1})_{l_{+a}-l,0}\end{pmatrix},$$

y obtenemos la siguiente expresión para la estructura de $\mathcal{M}$

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\mathcal{M}^{\top}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}:=\mathcal{M}'=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\ S_{l+1,l}&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ S_{l_{+a}-1,l}&S_{l_{+a}-1,l+1}&\cdots&1&0\\ S_{l_{+a},l}&S_{l_{+a},l+1}&\cdots&S_{l_{+a},l_{+a}-1}&1\end{pmatrix}.$$

De la estructura triangular de S deducimos que $(\mathcal{M}'^{-1})_{i,j}=S^{-1}_{i+l,j+l}$ para $i,j=0,1,\dots,l_{+a}-l$ y consecuentemente $(\mathcal{M}^{-1})_{j,0}=(\mathcal{M}'^{-1})_{l_{+a}-l,l_{+a}-l-j}=S^{-1}_{l_{+a},l_{+a}-j}$ para $i,j=0,1,\dots,l_{+a}-l$, lo que prueba (5.113).

La expresión para (5.116) se obtiene utilizando una técnica similar. Usando de nuevo (5.117) concluimos que $\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-a}\in\operatorname{span}\{\varphi^{(l_{-a})}_{\vec{n},2},\varphi^{(l_{-a}+1)}_{\vec{n},2},\dots,\varphi^{(l)}_{\vec{n},2}\}$; es decir, $\varphi^{(l)}_{\vec{n},2,-a}=\sum_{j=l_{-a}}^{l}B^{(l)}_j\varphi^{(j)}_{\vec{n},2}$. Las propiedades de bi-ortogonalidad y normalización implican que

$$\bar{B}^{(l)}_j=\int_{\mathbb{T}}\varphi^{(j)}_{\vec{n},1}(z)\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},2,-a}(z^{-1})d\mu(z)=S_{j,l_{-a}},\qquad j=l_{-a},\dots,l,$$

y eso prueba (5.116).

Las otras dos ecuaciones se obtienen utilizando las mismas ideas. □

Los polinomios que aparecen ahora en la fórmula de Christoffel-Darboux se pueden escribir en términos de los polinomios asociados definidos

$$(\chi^{[\geq l]}_{\vec{n}}(z)^{\dagger}-\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z)^{\dagger}(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}g^{[l,\geq l]}_{\vec{n}})e_{l_{+2}-l}=\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},2,+2}(\bar{z}),\qquad e^{\top}_{(l-1)_{-2}}(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z')=\varphi^{(l-1)}_{\vec{n},1,-2}(z'),\tag{5.118}$$

$$e^{\top}_{l_{+1}-l}(\chi^{[\geq l]}_{\vec{n}}(z')-g^{[\geq l,l]}_{\vec{n}}(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}\chi^{[l]}_{\vec{n}}(z'))=\varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+1}(z'),\qquad \chi^{[l]}_{\vec{n}}(z)^{\dagger}(g^{[l]}_{\vec{n}})^{-1}e_{(l-1)_{-1}}=\bar{\varphi}^{(l-1)}_{\vec{n},2,-1}(\bar{z}),\tag{5.119}$$

y esto da como resultado final el siguiente teorema

Teorema 5.47. *La fórmula de Christoffel-Darboux para la ordenación extendida es la siguiente*

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = \frac{\bar{z}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},2,+2}(\bar{z})\varphi^{(l-1)}_{\vec{n},1,-2}(z') - \varphi^{(l)}_{\vec{n},1,+1}(z')\bar{z}\bar{\varphi}^{(l-1)}_{\vec{n},2,-1}(\bar{z})}{(1-z'\bar{z})}. \tag{5.120}$$

Obtenemos los siguientes corolarios cuando tenemos una medida positiva de Borel μ

Corolario 5.48. *Dada una medida positiva μ, el núcleo de Christoffel-Darboux se puede expresar usando*

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = \frac{\bar{z}^{\nu_+(l)-\nu_-(l)-1}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(\bar{z}^{-1})z'^{\nu_+(l)-\nu_-(l)-2}\bar{\varphi}^{(l-1)}_{\vec{n},2}(z'^{-1}) - \varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(z')\bar{z}\bar{\varphi}^{(l-1)}_{\vec{n},2}(\bar{z})}{(1-z'\bar{z})}, \tag{5.121}$$

en el caso $a(l) = a(l-1) = 1$,

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = \frac{\bar{z}^{\nu_+(l)-\nu_-(l)-1}\varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(\bar{z}^{-1})\varphi^{(l-1)}_{\vec{n},2}(z') - \varphi^{(l)}_{\vec{n},1}(z')\bar{z}^{\nu_+(l)-\nu_-(l)-1}\varphi^{(l-1)}_{\vec{n},2}(\bar{z}^{-1})}{(1-z'\bar{z})}, \tag{5.122}$$

en el caso $a(l) = 1, a(l-1) = 2$,

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = \frac{\bar{z}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},1}(\bar{z})z'^{\nu_+(l)-\nu_-(l)}\bar{\varphi}^{(l-1)}_{\vec{n},2}(z'^{-1}) - z'^{\nu_+(l)-\nu_-(l)}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},1}(z'^{-1})\bar{z}\bar{\varphi}^{(l-1)}_{\vec{n},2}(\bar{z})}{(1-z'\bar{z})}, \tag{5.123}$$

en el caso $a(l) = 2, a(l-1) = 1$,

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = \frac{\bar{z}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},1}(\bar{z})\varphi^{(l-1)}_{\vec{n},2}(z') - z'^{\nu_+(l)-\nu_-(l)}\bar{\varphi}^{(l)}_{\vec{n},1}(z'^{-1})\bar{z}^{\nu_+(l)-\nu_-(l)+1}\varphi^{(l-1)}_{\vec{n},2}(\bar{z}^{-1})}{(1-z'\bar{z})}, \tag{5.124}$$

en el caso $a(l) = a(l-1) = 2$.

Corolario 5.49. *La fórmula de Christoffel-Darboux para una medida positiva de Borel μ se puede expresar en términos de los polinomios de Szegő como*

$$K_{\vec{n}}^{[l]}(z,z') = h_{l-1}^{-1}\bar{z}^{a(l)+\nu_+(l)-2}z'^{a(l)-1-\nu_-(l)}\frac{P_l(\bar{z}^{-1})P^*_{l-1}(z') - P_l(z')P^*_{l-1}(\bar{z}^{-1})}{1-z'\bar{z}}. \tag{5.125}$$

5.3. Jerarquías de tipo Toda bidimensional asociadas

Aquí analizamos el vínculo entre las construcciones hechas con polinomios de Laurent ortogonales en el círculo unitario $\mathbb{T}$ y los sistemas integrables de tipo Toda. La idea de base, como siempre, es la existencia de un problema de factorización.

5.3.1. Flujos de Toda para el círculo unitario

Consideraremos un conjunto de parámetros de deformación complejos $t = \{t_j, \tilde{t}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y con ella dos matrices semi-infinitas que definiremos ahora.[2]

Definición 5.50. 1. Las matrices de deformación son las siguientes

$$W_0(t) := \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} t_{1j}\Upsilon^j\Big), \qquad \tilde{W}_0(t) := \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} t_{2j}(\Upsilon^\top)^j\Big), \tag{5.126}$$

[2]Eliminaremos el subíndice $\vec{n}$ de g y Υ ya que las definiciones son válidas para cualquier valor de $\vec{n}$. Se supondrá que se ha elegido un $\vec{n}$ particular y toda la sección 5.3 se construirá usando ese $\vec{n}$.

2. Para cada t consideraremos la matriz $g(t)$

$$g(t) := W_0(t) g \tilde{W}_0(t)^{-1},$$

3. y la correspondiente factorización de Gauss-Borel dependiente del tiempo [3]

$$g(t) := W_0(t) g \tilde{W}_0(t)^{-1}, \qquad g(t) = S(t)^{-1} \tilde{S}(t).$$

Como vemos ahora la matriz deformada de momentos es la matriz de momentos de una medida deformada.

Proposición 5.51. *La matriz de momentos "deformada" se puede entender como la matriz de momentos para una medida "deformada" (esto es, dependiente del "tiempo") dada por*

$$d\mu(t,z) := \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} t_j z^j - \tilde{t}_j z^{-j}\Big) d\mu(z). \tag{5.127}$$

Demostración. Se emplea la misma técnica que en la proposición 4.46. □

De este resultado concluimos que al menos para medidas absolutamente continuas tenemos que

$$F_{\mu(t)} = \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} t_j z^j - \tilde{t}_j z^{-j}\Big) F_{\mu}(z), \tag{5.128}$$

de donde deducimos que los radios que definen la corona de convergencia son independientes del tiempo; es decir, $R_{\pm}(t) = R_{\pm}$.

Dada una medida positiva inicial μ, para poder asegurar que la medida evolucionada $\mu(t)$ es también definida positiva para todo tiempo es suficiente dar condiciones para que la exponencial sea real. Es decir, podemos fijar $\tilde{t}_j = -\bar{t}_j$, de modo que

$$\exp\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (t_j z^j + \bar{t}_j z^{-j})\Big) = \exp\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2\operatorname{Re}(t_j z^j)\Big). \tag{5.129}$$

5.3.2. Ecuaciones integrables de Toda

Definición 5.52. Asociada a la factorización LU deformada consideramos los objetos integrables habituales

1. Las matrices de onda semi-infinitas

$$W(t) := S(t) W_0(t), \qquad \tilde{W}(t) := \tilde{S}(t) \tilde{W}_0(t). \tag{5.130}$$

[3] Igualmente eliminaremos la dependencia temporal explícita de $S, \tilde{S}$ y por lo tanto no designarán los elementos de la factorización de la condición inicial sino de la "deformada". Consecuentemente, en esta sección $S, \tilde{S}$ siempre se considerarán dependientes de los parámetros "temporales".

2. Las funciones de Baker parciales y sus adjuntas (indicadas con *) en forma de vectores semi-infinitos.

$$\begin{aligned} \Psi_1(z,t) &:= W(t)\chi_1(z), & \tilde{\Psi}_1^*(z,t) &:= (\tilde{W}(t)^{-1})^\dagger\chi_1(z),\\ \Psi_2(z,t) &:= W(t)\chi_2^*(z), & \tilde{\Psi}_2^*(z,t) &:= (\tilde{W}(t)^{-1})^\dagger\chi_2^*(z),\\ \Psi_1^*(z,t) &:= (W(t)^{-1})^\dagger\chi_1^*(z), & \tilde{\Psi}_1(z,t) &:= \tilde{W}(t)\chi_1^*(z),\\ \Psi_2^*(z,t) &:= (W(t)^{-1})^\dagger\chi_2(z), & \tilde{\Psi}_2(z,t) &:= \tilde{W}(t)\chi_2(z), \end{aligned} \tag{5.131}$$

las funciones de onda y sus adjuntas

$$\begin{aligned} \Psi(z,t) &:= W(t)\chi(z) = (\Psi_1+\Psi_2)(z,t), & \tilde{\Psi}^*(z,t) &:= (\tilde{W}(t)^{-1})^\dagger\chi(z) = (\tilde{\Psi}_1^*+\tilde{\Psi}_2^*)(z,t),\\ \Psi^*(z,t) &:= (W(t)^{-1})^\dagger\chi^*(z) = (\Psi_1^*+\Psi_2^*)(z,t), & \tilde{\Psi}(z,t) &:= \tilde{W}(t)\chi^*(z) = (\tilde{\Psi}_1+\tilde{\Psi}_2)(z,t). \end{aligned} \tag{5.132}$$

3. Las matrices semi-infinitas de Lax

$$L(t) := S(t)\Upsilon S(t)^{-1}, \qquad \tilde{L}(t) := \tilde{S}(t)\Upsilon^\top\tilde{S}(t)^{-1}. \tag{5.133}$$

4. Las matrices semi-infinitas de Zakharov-Shabat

$$B_j := (L^j)_+, \qquad \tilde{B}_j := (\tilde{L}^j)_-. \tag{5.134}$$

Teorema 5.53. *Para $j,j'=1,2,\dots$ se verifican las siguientes relaciones diferenciales*

1. El sistema lineal para las matrices de ondas

$$\frac{\partial W}{\partial t_j} = B_jW, \qquad \frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_j} = \tilde{B}_jW, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t_j} = B_j\tilde{W}, \qquad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}_j} = \tilde{B}_j\tilde{W}. \tag{5.135}$$

2. Los sistemas lineales para las funciones de onda y sus adjuntas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t_j} &= B_j\Psi, & \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{t}_j} &= \tilde{B}_j\Psi, & \frac{\partial \tilde{\Psi}^*}{\partial t_j} &= -B_j^\dagger\tilde{\Psi}^*, & \frac{\partial \tilde{\Psi}^*}{\partial \tilde{t}_j} &= -\tilde{B}_j^\dagger\tilde{\Psi}^*,\\ \frac{\partial \Psi^*}{\partial t_j} &= -B_j^\dagger\Psi, & \frac{\partial \Psi^*}{\partial \tilde{t}_j} &= -\tilde{B}_j^\dagger\Psi, & \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t_j} &= B_j\tilde{\Psi}, & \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{t}_j} &= \tilde{B}_j\tilde{\Psi}. \end{aligned} \tag{5.136}$$

3. Las ecuaciones de Lax

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = [B_j, L], \qquad \frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_j} = [\tilde{B}_j, L], \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_j} = [B_j, \tilde{L}], \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}_j} = [\tilde{B}_j, \tilde{L}]. \tag{5.137}$$

4. Las ecuaciones de Zakharov-Shabat

$$\frac{\partial B_j}{\partial t_{j'}} - \frac{\partial B_{j'}}{\partial t_j} + [B_j, B_{j'}] = 0, \tag{5.138}$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_j}{\partial \tilde{t}_{j'}} - \frac{\bar{\partial} B_{j'}}{\partial \tilde{t}_j} + [\tilde{B}_j, \tilde{B}_{j'}] = 0, \tag{5.139}$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial \tilde{t}_{j'}} - \frac{\partial \tilde{B}_{j'}}{\partial t_j} + [B_j, \tilde{B}_{j'}] = 0. \tag{5.140}$$

Demostración. La prueba se puede hacer utilizando las mismas ideas que se usan en la demostración del teorema 4.49 de modo que no se repetirán aquí de nuevo. □

Proposición 5.54. *1. Las funciones de onda están ligadas a los OLPUC y a la serie de Fourier de la medida a través de*

$$\begin{aligned}\Psi^{(n)}(z,t) &= \varphi_1^{(n)}(z,t)\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{\infty} t_j z^j},\\ (\tilde{\Psi}^*)^{(n)}(z,t) &= \varphi_2^{(n)}(z,t)\,\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{\infty}\overline{\tilde{t}_j} z^j},\end{aligned} \tag{5.141}$$

$$\begin{aligned}(\Psi^*)^{(n)}(z,t) &= 2\pi\varphi_2^{(n)}(z^{-1},t)z^{-1}\bar{F}_{\mu(t)}(z)\,\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{\infty}\bar{t}_j z^j}\\ &= 2\pi\varphi_2^{(n)}(z^{-1},t)z^{-1}\bar{F}_{\mu}(z)\,\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{\infty}\overline{\tilde{t}_j} z^{-j}},\\ \tilde{\Psi}^{(n)}(z,t) &= 2\pi\varphi_1^{(n)}(z^{-1},t)z^{-1}F_{\mu(t)}(z^{-1})\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{t}_j z^j}\\ &= 2\pi\varphi_1^{(n)}(z^{-1},t)z^{-1}F_{\mu}(z^{-1})\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{\infty} t_j z^{-j}}.\end{aligned} \tag{5.142}$$

2. Además, las funciones de onda son autofunciones de los operadores de Lax

$$L\Psi = z\Psi, \qquad \tilde{L}^{\dagger}\tilde{\Psi}^* = z\tilde{\Psi}^*, \tag{5.143}$$

$$L^{\dagger}\Psi^* = z\Psi^*, \qquad \tilde{L}\tilde{\Psi} = z\tilde{\Psi}. \tag{5.144}$$

5.3.3. Matrices CMV y la red de Toeplitz

Con la ordenación CMV para la base de Laurent, las ecuaciones de Lax (5.137) se pueden escribir como sistemas dinámicos no lineales, lo que es una versión en el contexto CMV de la red de Toeplitz estudiada por Mark Adler y Pierre van Moerbeke [6].

Proposición 5.55. *Para el caso $\vec{n} = (1,1)$ las ecuaciones de Lax* (5.137) *tienen como consecuencia las siguientes ecuaciones no lineales para los coeficientes de Verblunsky.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_k^{(1)}}{\partial t_1} &= \alpha_{k+1}^{(1)}(1-\alpha_k^{(1)}\bar{\alpha}_k^{(2)}), & \frac{\partial\bar{\alpha}_k^{(2)}}{\partial t_1} &= -\bar{\alpha}_{k-1}^{(2)}(1-\alpha_k^{(1)}\bar{\alpha}_k^{(2)}),\\ \frac{\partial\alpha_k^{(1)}}{\partial\tilde{t}_1} &= \alpha_{k-1}^{(1)}(1-\alpha_k^{(1)}\bar{\alpha}_k^{(2)}), & \frac{\partial\bar{\alpha}_k^{(2)}}{\partial\tilde{t}_1} &= -\bar{\alpha}_{k+1}^{(2)}(1-\alpha_k^{(1)}\bar{\alpha}_k^{(2)}),\end{aligned} \tag{5.145}$$

con $k = 1, 2, \dots$.

Demostración. La demostración se basa en el cálculo directo a partir de las ecuaciones de Lax. Hemos calculado previamente $J = L$ y usando el mismo método se puede calcular $\tilde{L}$. Ambas son matrices pentadiagonales dadas por

$$L = J = \begin{pmatrix} -\alpha_1^{(1)} & -\alpha_2^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \rho_1^2 & -\alpha_2^{(1)}\bar{\alpha}_1^{(2)} & \bar{\alpha}_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & -\rho_2^2\alpha_3^{(1)} & -\alpha_3^{(1)}\bar{\alpha}_2^{(2)} & -\alpha_4^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \rho_2^2\rho_3^2 & \rho_3^2\bar{\alpha}_2^{(2)} & -\alpha_4^{(1)}\bar{\alpha}_3^{(2)} & \bar{\alpha}_3^{(2)} & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & -\rho_4^2\alpha_5^{(1)} & -\alpha_5^{(1)}\bar{\alpha}_4^{(2)} & -\alpha_6^{(1)} & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \rho_4^2\rho_5^2 & \rho_5^2\bar{\alpha}_4^{(2)} & -\alpha_6^{(1)}\bar{\alpha}_5^{(2)} & \bar{\alpha}_5^{(2)} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} -\bar{\alpha}_1^{(2)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\rho_1^2\bar{\alpha}_2^{(2)} & -\alpha_1^{(1)}\bar{\alpha}_2^{(2)} & -\bar{\alpha}_3^{(2)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \rho_1^2\rho_2^2 & \rho_2^2\alpha_1^{(1)} & -\alpha_2^{(1)}\bar{\alpha}_3^{(2)} & \alpha_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\rho_3^2\bar{\alpha}_4^{(2)} & -\alpha_3^{(1)}\bar{\alpha}_4^{(2)} & -\bar{\alpha}_5^{(2)} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \rho_3^2\rho_4^2 & \rho_4^2\alpha_3^{(1)} & -\alpha_4^{(1)}\bar{\alpha}_5^{(2)} & \alpha_4^{(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_5^2\bar{\alpha}_6^{(2)} & -\alpha_5^{(1)}\bar{\alpha}_6^{(2)} & -\bar{\alpha}_7^{(2)} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Como estamos buscando expresiones para los flujos asociados a los tiempos t_1 y $\tilde{t}_1$ entonces $B_1 = (L)_+$ y $\tilde{B}_1 = (\tilde{L})_-$. Usando (5.137) en los elementos de matriz $(L)_{k,k+1}$ para $k \geq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{2k+2}^{(1)}}{\partial t_1} &= -\frac{\partial L_{2k,2k+1}}{\partial t_1} = -[B_1, L]_{2k,2k+1} = \alpha_{2k+3}^{(1)}(1-\alpha_{2k+2}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)}), \\ \frac{\partial \alpha_{2k+2}^{(1)}}{\partial \tilde{t}_1} &= -\frac{\partial L_{2k,2k+1}}{\partial \tilde{t}_1} = -[\tilde{B}_1, L]_{2k,2k+1} = \alpha_{2k+1}^{(1)}(1-\alpha_{2k+2}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)}), \\ \frac{\partial \bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}}{\partial t_1} &= \frac{\partial L_{2k+1,2k+2}}{\partial t_1} = [B_1, L]_{2k+1,2k+2} = -\bar{\alpha}_{2k}^{(2)}(1-\alpha_{2k+1}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}), \\ \frac{\partial \bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}}{\partial \tilde{t}_1} &= \frac{\partial L_{2k+1,2k+2}}{\partial \tilde{t}_1} = [\tilde{B}_1, L]_{2k+1,2k+2} = -\bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)}(1-\alpha_{2k+1}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}), \end{aligned}$$

y empleando $L_{2k,2k}$ y $\tilde{L}_{2k+1,2k+1}$ para $k \geq 0$ obtenemos el resto de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\alpha}_{2k}^{(2)}\alpha_{2k+1}^{(1)})}{\partial t_1} &= -\frac{\partial L_{2k,2k}}{\partial t_1} = -[B_1, L]_{2k,2k} &\Rightarrow\quad & \frac{\partial \alpha_{2k+1}^{(1)}}{\partial t_1} = \alpha_{2k+2}^{(1)}(1-\alpha_{2k+1}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}), \\ \frac{\partial(\bar{\alpha}_{2k}^{(2)}\alpha_{2k+1}^{(1)})}{\partial \tilde{t}_1} &= -\frac{\partial L_{2k,2k}}{\partial \tilde{t}_1} = -[\tilde{B}_1, L]_{2k,2k} &\Rightarrow\quad & \frac{\partial \alpha_{2k+1}^{(1)}}{\partial \tilde{t}_1} = \alpha_{2k}^{(1)}(1-\alpha_{2k+1}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}), \\ \frac{\partial(\alpha_{2k+1}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)})}{\partial t_1} &= -\frac{\partial \tilde{L}_{2k+1,2k+1}}{\partial t_1} = -[B_1, \tilde{L}]_{2k+1,2k+1} &\Rightarrow\quad & \frac{\partial \bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)}}{\partial t_1} = -\bar{\alpha}_{2k+1}^{(2)}(1-\alpha_{2k+2}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)}), \\ \frac{\partial(\alpha_{2k+1}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)})}{\partial \tilde{t}_1} &= -\frac{\partial \tilde{L}_{2k+1,2k+1}}{\partial \tilde{t}_1} = -[\tilde{B}_1, \tilde{L}]_{2k+1,2k+1} &\Rightarrow\quad & \frac{\partial \bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)}}{\partial \tilde{t}_1} = -\bar{\alpha}_{2k+3}^{(2)}(1-\alpha_{2k+2}^{(1)}\bar{\alpha}_{2k+2}^{(2)}). \end{aligned}$$

Si consideramos conjuntamente todas las ecuaciones obtenemos (5.145). □

Si la medida inicial μ es definida positiva entonces las sucesiones $\{\alpha_k^{(1)}\}$ y $\{\bar{\alpha}_k^{(2)}\}$ son idénticas en $t = 0$. Además, si fijamos $\tilde{t}_1 = -\bar{t}_1$, la medida evolucionada es siempre real y solo hay una familia de funciones dependientes del tiempo. Esta es la reducción estudiada por L. B. Golinskii [63] en el contexto de los flujos de Schur.

La que hemos obtenido aquí es una versión CMV de la red de Toeplitz, pero para cualquier $\vec{n}$ la jerarquía integrable es siempre equivalente a la discutida en [6]. La razón para esto está en que para cualquier medida positiva de Borel μ y para cualquier $\vec{n}$, hay una biyección entre el conjunto de OLPUC $\{\varphi_{\vec{n},1}^{(l)}\}$ y el conjunto de los polinomios de Szegő $\{P_l\}$ asociados a dicha medida. Todos los coeficientes de los polinomios P_l están determinados por los coeficientes de reflexión $\{\alpha_l\}$, de modo que la evolución temporal para los polinomios de Szegő bajo los flujos de tipo Toda está determinada por la evolución de los coeficientes de reflexión. Como la medida no depende $\vec{n}$, es natural que se obtenga siempre la misma evolución temporal para la familia $\{\alpha_l\}$ bajo los flujos de Toda. Conjeturamos que lo mismo se da en el caso cuasi-definido.

5.3.4. Introducción de flujos discretos

Consideramos ahora flujos discretos asociados a la matriz de momentos. Dados dos enteros s_1, s_2 y $s := \{s_1, s_2\}$ es entonces posible hacer nuevas deformaciones de la matriz de momentos que depende de s.

Definición 5.56. Introducimos para cada s la matriz de momentos deformada $g(s)$ y su factorización LU deformada

$$g(s) := D_0(s) g \tilde{D}_0(s)^{-1}, \qquad g(s) = S^{-1}(s)\tilde{S}(s), \tag{5.146}$$

donde $D_0(s), \tilde{D}_0(s)$ son operadores discretos que se determinarán más adelante.

Consideramos el operador T de la traslación $s_1 \mapsto s_1 + 1$ y $\tilde{T}$ que corresponde a la traslación $s_2 \mapsto s_2 + 1$. Supongamos que existen matrices $q, \tilde{q}$ y que satisfacen

$$T(D_0) = qD_0, \qquad T(\tilde{D}_0) = \tilde{D}_0, \tag{5.147}$$

$$\tilde{T}(D_0) = D_0, \qquad \tilde{T}(\tilde{D}_0) = \tilde{q}\tilde{D}_0, \tag{5.148}$$

a continuación definimos

$$\delta := S(s) q S(s)^{-1}, \qquad \tilde{\delta} := \tilde{S}(s)\tilde{q}\tilde{S}(s)^{-1}. \tag{5.149}$$

Si δ y $\tilde{\delta}$ se pueden factorizar LU, entonces existen matrices semi-infinitas $\delta_+, \delta_-, \tilde{\delta}_+, \tilde{\delta}_-$ tales que

$$\delta = \delta_-^{-1}\delta_+, \qquad \tilde{\delta}^{-1} = \tilde{\delta}_-^{-1}\tilde{\delta}_+. \tag{5.150}$$

En este caso definimos

$$\omega := \delta_+, \qquad \tilde{\omega} := \tilde{\delta}_-. \tag{5.151}$$

Proposición 5.57. *Los operadores $T, \tilde{T}$ y las matrices $S(s), \tilde{S}(s)$ satisfacen las siguientes ecuaciones*

$$(TS(s))(S(s))^{-1} = \delta_-, \qquad (T\tilde{S}(s))(\tilde{S}(s))^{-1} = \delta_+, \tag{5.152}$$

$$(\tilde{T}S(s))(S(s))^{-1} = \tilde{\delta}_-, \qquad (\tilde{T}\tilde{S}(s))(\tilde{S}(s))^{-1} = \tilde{\delta}_+. \tag{5.153}$$

Es posible definir dos matrices de ondas W y $\tilde{W}$ en el contexto discreto,

$$W := SD_0, \qquad \tilde{W} := \tilde{S}\tilde{D}_0. \tag{5.154}$$

Si consideramos los flujos de tipo continuo y discreto simultáneamente necesitamos reemplazar $D_0 \mapsto D_0 W_0$ y $\tilde{D}_0 \mapsto \tilde{D}_0 \tilde{W}_0$.

Los siguientes resultados son válidos independientemente de que la evolución de tipo continuo esté presente o no, y la prueba es muy similar a la hecha en el capítulo 4.

Teorema 5.58. *1. Se satisface el siguiente sistema lineal para W y $\tilde{W}$*

$$TW = \omega W \qquad T\tilde{W} = \omega\tilde{W} \qquad \tilde{T}W = \tilde{\omega}W \qquad \tilde{T}\tilde{W} = \tilde{\omega}\tilde{W}. \tag{5.155}$$

2. Las versiones discretas de las ecuaciones de Lax son las siguientes

$$TL = \omega L\omega^{-1} \qquad \tilde{T}L = \tilde{\omega}L\tilde{\omega}^{-1} \qquad T\tilde{L} = \omega\tilde{L}\omega^{-1} \qquad \tilde{T}\tilde{L} = \tilde{\omega}\tilde{L}\tilde{\omega}^{-1}. \tag{5.156}$$

3. Las ecuaciones de compatibilidad para los flujos discretos en el sistema lineal (5.155) *son*

$$(T\tilde{\omega})\omega = (\tilde{T}\omega)\tilde{\omega}. \tag{5.157}$$

Si también hay deformaciones continuas se pueden formular las ecuaciones mixtas de compatibilidad que son

$$\begin{aligned} T(B_j) &= \frac{\partial\omega}{\partial t_j}\omega^{-1} + \omega B_j\omega^{-1} \quad \tilde{T}(B_j) = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t_j}\tilde{\omega}^{-1} + \tilde{\omega}B_j\tilde{\omega}^{-1}, \\ T(\tilde{B}_j) &= \frac{\partial\omega}{\partial\tilde{t}_j}\omega^{-1} + \omega\tilde{B}_j\omega^{-1} \quad \tilde{T}(\tilde{B}_j) = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\tilde{t}_j}\tilde{\omega}^{-1} + \tilde{\omega}\tilde{B}_j\tilde{\omega}^{-1}. \end{aligned} \tag{5.158}$$

Ahora damos dos ejemplos de operadores discretos. Sean $\{\lambda(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ y $\{\tilde{\lambda}(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dos sucesiones complejas con $\lambda(j), \tilde{\lambda}(j) \in \mathbb{D}$, entonces definimos

$$D_0^{(1)} := \begin{cases} \Pi_{j=0}^{s_1}(\Upsilon - \lambda(j)\mathbb{I}) & s_1 > 0, \\ \mathbb{I} & s_1 = 0, \\ \Pi_{j=0}^{|s_1|}(\Upsilon - \lambda(-j)\mathbb{I})^{-1} & s_1 < 0, \end{cases} \quad (\tilde{D}_0^{(1)})^{-1} := \begin{cases} \Pi_{j=0}^{s_2}(\Upsilon^\top - \tilde{\lambda}(j)\mathbb{I}) & s_2 > 0, \\ \mathbb{I} & s_2 = 0, \\ \Pi_{j=0}^{|s_2|}(\Upsilon^\top - \tilde{\lambda}(-j)\mathbb{I})^{-1} & s_2 < 0. \end{cases} \tag{5.159}$$

y a partir de ahí deducimos que la evolución de la medida es entonces

$$d\mu(z,s) = \mathscr{D}^{(1)}(z,s_1)(\tilde{\mathscr{D}}^{(1)})^{-1}(z,s_2)d\mu(z) \tag{5.160}$$

donde los factores de evolución temporal que aparecen en la fórmula son

$$\mathscr{D}^{(1)}(z,s) = \begin{cases} \Pi_{j=0}^{s_1}(z - \lambda(j)) & s_1 > 0, \\ 1 & s_1 = 0, \\ \Pi_{j=0}^{|s_1|}(z - \lambda(-j))^{-1} & s_1 < 0, \end{cases} \quad (\tilde{\mathscr{D}}^{(1)})^{-1}(z,s) = \begin{cases} \Pi_{j=0}^{s_2}(z^{-1} - \tilde{\lambda}(j)) & s_2 > 0, \\ 1 & s_2 = 0, \\ \Pi_{j=0}^{|s_2|}(z^{-1} - \tilde{\lambda}(-j))^{-1} & s_2 < 0. \end{cases} \tag{5.161}$$

En este caso

$$q^{(1)} = \Upsilon - \lambda(s_1+1)\mathbb{I}, \qquad \tilde{q}^{(1)} = \Upsilon^\top - \tilde{\lambda}(s_2+1)\mathbb{I}, \tag{5.162}$$

$$\delta^{(1)} = L - \lambda(s_1+1)\mathbb{I}, \qquad \tilde{\delta}^{(1)} = \tilde{L} - \tilde{\lambda}(s_2+1)\mathbb{I}. \tag{5.163}$$

La evolución de las funciones de ondas está asociada a los polinomios de Laurent evolucionados temporalmente

$$\Psi(z,s) = W(s)\chi(z) = S(s)D_0(s)\chi(z) = \Phi_1(z,s)\mathscr{D}^{(1)}(z,s), \tag{5.164}$$

$$\tilde{\Psi}^*(z,s) = (\tilde{W}(s)^{-1})^\dagger\chi(z) = (\tilde{S}(s)^{-1})^\dagger(\tilde{D}_0(s)^{-1})^\dagger\chi(z) = \Phi_2(z,s)(\tilde{\mathscr{D}}^{(1)})^{-1}(z,s), \tag{5.165}$$

donde $\Phi_1(z,t)$ y $\Phi_2(z,t)$ son los polinomios de Laurent asociados a la medida evolucionada.

Lema 5.59. *Tenemos la siguiente estructura para las matrices $\omega, \tilde{\omega}$*

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \omega_1\Lambda + \cdots + \omega_{n_-+1}\Lambda^{n_-+1},\\ \tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1\Lambda^\top + \cdots + \tilde{\omega}_{n_++1}(\Lambda^\top)^{n_++1},\\ \omega^\dagger &= \rho_0 + \rho_1\Lambda^\top + \cdots + \rho_{n_-+1}(\Lambda^\top)^{n_-+1},\\ \tilde{\omega}^\dagger &= \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_1\Lambda + \cdots + \tilde{\rho}_{n_++1}\Lambda^{n_++1}.\end{aligned} \tag{5.166}$$

para ciertas matrices semi-infinitas

$$\begin{aligned}\omega_j &= \operatorname{diag}(\omega_j(0), \omega_j(1), \dots) & j &= 0, \dots, n_- + 1,\\ \tilde{\omega}_j &= \operatorname{diag}(\tilde{\omega}_j(0), \tilde{\omega}_j(1), \dots) & j &= 0, \dots, n_+ + 1,\\ \rho_j &= \operatorname{diag}(\rho_j(0), \rho_j(1), \dots) & j &= 0, \dots, n_- + 1,\\ \tilde{\rho}_j &= \operatorname{diag}(\tilde{\rho}_j(0), \tilde{\rho}_j(1), \dots) & j &= 0, \dots, n_+ + 1.\end{aligned} \tag{5.167}$$

Si definimos

$$\gamma(z,s) := z - \lambda(s_1+1), \qquad \tilde{\gamma}(z,s) := z^{-1} - \tilde{\lambda}(s_2+1), \tag{5.168}$$

el lema anterior nos permite calcular la acción de los operadores T y $\tilde{T}$ en los polinomios $\varphi_1^{(l)}(z,s), \varphi_2^{(l)}(z,s)$

Proposición 5.60. *Se verifican las siguientes ecuaciones*

$$\begin{aligned}(T\varphi_1^{(l)})\gamma &= \omega_0(l)\varphi_1^{(l)} + \omega_1(l)\varphi_1^{(l+1)} + \cdots + \omega_{n_-+1}(l)\varphi_1^{(l+n_-+1)},\\ (\tilde{T}\varphi^{(l)}) &= \tilde{\omega}_0(l)\varphi_1^{(l)} + \tilde{\omega}_1(l)\varphi_1^{(l-1)} + \cdots + \tilde{\omega}_{n_++1}(l)\varphi_1^{(l-n_+-1)},\\ \varphi_2^{(l)} &= \rho_0(l)(T\varphi_2^{(l)}) + \rho_1(l)(T\varphi_2^{(l-1)}) + \cdots + \rho_{n_-+1}(l)(T\varphi_2^{(l-n_--1)}),\\ \varphi_2^{(l)} &= \Big(\tilde{\rho}_0(l)(\tilde{T}\varphi_2^{(l)}) + \tilde{\rho}_1(l)(\tilde{T}\varphi_2^{(l+1)}) + \cdots + \tilde{\rho}_{n_++1}(l)(\tilde{T}\varphi_2^{(l+n_++1)})\Big)\tilde{\gamma}.\end{aligned} \tag{5.169}$$

Otra posible opción que preserva el carácter real de la medida es usar pares de transformaciones conjugadas como sigue

$$D_0^{(2)} := \begin{cases}\Pi_{j=0}^{s_1}(\Upsilon - \lambda(j)\mathbb{I})(\Upsilon^\top - \bar{\lambda}(j)\mathbb{I}) & s_1 > 0\\ \mathbb{I} & s_1 = 0\\ \Pi_{j=0}^{|s_1|}(\Upsilon - \lambda(-j)\mathbb{I})^{-1}(\Upsilon^\top - \bar{\lambda}(-j)\mathbb{I})^{-1} & s_1 < 0\end{cases}$$

$$(\tilde{D}_0^{(2)})^{-1} := \begin{cases}\Pi_{j=0}^{s_2}(\Upsilon^\top - \tilde{\lambda}(j)\mathbb{I})(\Upsilon - \overline{\tilde{\lambda}(j)}\mathbb{I}) & s_2 > 0\\ \mathbb{I} & s_2 = 0\\ \Pi_{j=0}^{|s_2|}(\Upsilon^\top - \tilde{\lambda}(-j)\mathbb{I})^{-1}(\Upsilon - \overline{\tilde{\lambda}(-j)}\mathbb{I})^{-1} & s_2 < 0\end{cases}$$

la evolución de la medida es entonces

$$d\mu(z,s) = \mathscr{D}^{(2)}(z,s_1)(\tilde{\mathscr{D}}^{(2)})^{-1}(z,s_2)d\mu(z)$$

donde

$$\mathscr{D}^{(2)}(z,s) = \begin{cases}\Pi_{j=0}^{s_1}|z-\lambda(j)|^2 & s_1 > 0\\ 1 & s_1 = 0\\ \Pi_{j=0}^{|s_1|}|z-\lambda(-j)|^{-2} & s_1 < 0\end{cases} \quad (\tilde{\mathscr{D}}^{(2)})^{-1}(z,s) = \begin{cases}\Pi_{j=0}^{s_2}|z^{-1}-\tilde{\lambda}(j)|^2 & s_2 > 0\\ 1 & s_2 = 0\\ \Pi_{j=0}^{|s_2|}|z^{-1}-\tilde{\lambda}(-j)|^{-2} & s_2 < 0\end{cases} \tag{5.170}$$

en este caso

$$
\begin{aligned}
q^{(2)} &= (\Upsilon - \lambda(s_1+1)\mathbb{I})(\Upsilon^\top - \bar{\lambda}(s_1+1)\mathbb{I}) & \tilde{q}^{(2)} &= (\Upsilon^\top - \tilde{\lambda}(s_2+1)\mathbb{I})(\Upsilon - \overline{\tilde{\lambda}(s_2+1)}\mathbb{I}) \\
\delta^{(2)} &= (L - \lambda(s_1+1)\mathbb{I})(L^{-1} - \bar{\lambda}(s_1+1)\mathbb{I}) & \tilde{\delta}^{(2)} &= (\tilde{L} - \tilde{\lambda}(s_2+1)\mathbb{I})(\tilde{L}^{-1} - \overline{\tilde{\lambda}(s_2+1)}\mathbb{I})
\end{aligned}
\tag{5.171}
$$

Estos flujos discretos conducen a transformaciones de Geronimus como las tratadas en [89]. Cuando las sucesiones $\{\lambda(j)\}, \{\tilde{\lambda}(j)\}$ son constantes y por lo tanto q y $\tilde{q}$ son invariantes bajo la acción de T y $\tilde{T}$ podemos hacer una interpretación en términos de transformaciones de Darboux en el contexto de [5] como hicimos en el capítulo 4. En este caso lo que obtenemos es

$$
\begin{aligned}
\delta &= \delta_-^{-1}\delta_+, & T\delta &= (TW)q(TW^{-1}) = \omega\delta\omega^{-1} = \delta_+\delta_-^{-1}\delta_+\delta_+^{-1} = \delta_+\delta_-^{-1}, \\
\tilde{\delta}^{-1} &= \tilde{\delta}_-^{-1}\tilde{\delta}_+, & \tilde{T}\tilde{\delta}^{-1} &= (\tilde{T}\tilde{W})\tilde{q}^{-1}(\tilde{T}\tilde{W}^{-1}) = \tilde{\omega}\tilde{\delta}^{-1}\tilde{\omega}^{-1} = \tilde{\delta}_-\tilde{\delta}_-^{-1}\tilde{\delta}_+\tilde{\delta}_-^{-1} = \tilde{\delta}_+\tilde{\delta}_-^{-1},
\end{aligned}
$$

que es un cambio de la factorización LU a UL.

5.3.5. La ecuación bilineal y las funciones τ

Las expresiones para los OLPUC en forma de determinantes, y los polinomios asociados Laurent que corresponden a las funciones de segunda especie conducen a la representación de estos objetos en forma de funciones τ. Para esta tarea consideramos las traslaciones de Miwa y sus duales adecuadas a este caso, que serán

Definición 5.61.

$$
t \mapsto t \pm [w]_1 := t_j \mapsto t_j \pm \frac{w^j}{j}, \quad \tilde{t}_j \mapsto \tilde{t}_j, \tag{5.172}
$$

$$
t \mapsto t \pm [w]_2 := t_j \mapsto t_j, \quad \tilde{t}_j \mapsto \tilde{t}_j \pm \frac{w^j}{j}. \tag{5.173}
$$

Estas transformaciones actúan de forma usual sobre la medida deformada

Proposición 5.62. *La medida evolucionada $\mu(z,t)$ tiene el siguiente comportamiento*

$$
\begin{aligned}
\mu(z, t \pm [w^{-1}]_1) &= \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{\mp 1} \mu(z,t), & |z| &< |w|, \\
\mu(z, t \pm [w]_2) &= \left(1 - \frac{w}{z}\right)^{\pm 1} \mu(z,t) & |z| &> |w|.
\end{aligned}
$$

Al igual que hicimos en el capítulo 4 introducimos las funciones τ principales y asociadas a través de los determinantes adecuados

Definición 5.63. La función la función τ como

$$
\tau^{(0)}(t) := 1, \qquad \tau^{(l)}(t) := \det g^{[l]}(t), \qquad l = 1, 2, \dots,
$$

y las funciones τ asociadas como

$$\tau_{-a}^{(l)}(t) := (-1)^{l+l_{-a}} \det \left(\begin{array}{cccc|ccc} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l_{-a}-1} & g_{0,l_{-a}+1} & \cdots & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l_{-a}-1} & g_{1,l_{-a}+1} & \cdots & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l_{-a}-1} & g_{l-1,l_{-a}+1} & \cdots & g_{l-1,l} \end{array}\right), \quad l = |\vec{n}|, |\vec{n}|+1, \dots,$$

$$\tilde{\tau}_{-a}^{(l)}(t) := (-1)^{l+l_{-a}} \det \left(\begin{array}{cccc} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l_{-a}-1,0} & g_{l_{-a}-1,1} & \cdots & g_{l_{-a}-1,l} \\ \hline g_{l_{-a}+1,0} & g_{l_{-a}+1,1} & \cdots & g_{l_{-a}+1,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l,0} & g_{l,1} & \cdots & g_{l,l} \end{array}\right), \qquad l = |\vec{n}|, |\vec{n}|+1, \dots,$$

$$\tilde{\tau}_{+a}^{(l)}(t) := \det \left(\begin{array}{cccc|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-2} & g_{0,(l-1)_{+a}} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-2} & g_{1,(l-1)_{+a}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{l-1,0} & g_{l-1,1} & \cdots & g_{l-1,l-2} & g_{l-1,(l-1)_{+a}} \end{array}\right), \qquad l = |\vec{n}|, |\vec{n}|+1, \dots,$$

$$\tau_{+a}^{(l)}(t) := \det \left(\begin{array}{cccc} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{l-2,0} & g_{l-2,1} & \cdots & g_{l-2,l-1} \\ \hline g_{(l-1)_{+a},0} & g_{(l-1)_{+a},1} & \cdots & g_{(l-1)_{+a},l-1} \end{array}\right), \qquad l = |\vec{n}|, |\vec{n}|+1, \dots.$$

Teorema 5.64. *Dado $l \geq |\vec{n}|$, se tiene la siguiente representación en términos de funciones τ para los OLPUC*

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(l)}(z,t) &= \varphi_{1,+1}^{(l)}(z,t) = \tilde{S}_{ll}\varphi_{1,-1}^{(l)}(z,t) = z^{\nu_+(l)-1}\frac{\tau^{(l)}(t-[z^{-1}]_1)}{\tau^{(l)}(t)}, \quad a(l) = 1, \\ \varphi_1^{(l)}(z,t) &= \varphi_{1,+2}^{(l)}(z,t) = \tilde{S}_{ll}\varphi_{1,-2}^{(l)}(z,t) = z^{-\nu_-(l)}\frac{\tau^{(l)}(t+[z]_2)}{\tau^{(l)}(t)}, \qquad a(l) = 2, \end{aligned} \tag{5.174}$$

Para los otros polinomios asociados "+" tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_{1,+2}^{(l)}(z,t) &= z^{-\nu_-(l_{+2})}\frac{\tau^{(l)}(t+[z]_2)}{\tau^{(l)}(t)}, \qquad a(l) = 1, \\ \varphi_{1,+1}^{(l)}(z,t) &= z^{\nu_+(l_{+1})-1}\frac{\tau^{(l)}(t-[z^{-1}]_1)}{\tau^{(l)}(t)}, \quad a(l) = 2, \end{aligned} \tag{5.175}$$

y finalmente, los restantes polinomios asociados de tipo "−" se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \varphi_{1,-2}^{(l)}(z,t) &= z^{\nu_+(l)-1}\frac{\tau_{-2}^{(l)}(t-[z^{-1}]_1)}{\tau^{(l+1)}(t)}, \quad a(l) = 1, \\ \varphi_{1,-1}^{(l)}(z,t) &= z^{-\nu_-(l)}\frac{\tau_{-1}^{(l)}(t+[z]_2)}{\tau^{(l+1)}(t)}, \qquad a(l) = 2. \end{aligned} \tag{5.176}$$

Demostración. Probemos (5.174). Si $a(l) = 1$ podemos usar el lema 4.78 con $r_1 = r_{(l-1)_{-2}}$ y

$r_n = r_{(l-1)_{-1}}$ para desarrollar

$$\begin{aligned}
z^{\nu_+(l)-1}\tau^{(l)}(t-[z^{-1}]_1) &= z^{\nu_+(l)-1}(M_{ll}^{(l+1)} + (-1)^{l+(l-1)_{-1}}z^{-1}M_{(l-1)_{-1}l}^{(l+1)} + \cdots + (-1)^{l+(l-1)_{-2}}z^{-l}M_{(l-1)_{-2}l}^{(l+1)})\\
&= \sum_{j=0}^{l}(-1)^{l+j}M_{jl}^{(l+1)}\chi^{(j)}(z)\\
&= \det(g^{[l]}(t))\varphi_1^{(l)}(z,t)\\
&= \tau^{(l)}(t)\varphi_1^{(l)}(z,t).
\end{aligned}$$

Si $a(l)=2$ funciona el mismo procedimiento con $r_1 = r_{(l-1)_{-1}}$ y $r_n = r_{(l-1)_{-2}}$. Ahora la expansión es

$$\begin{aligned}
z^{-\nu_-(l)}\tau^{(l)}(t+[z]_2) &= z^{-\nu_-(l)}(M_{ll}^{(l+1)} + (-1)^{l+(l-1)_{-2}}zM_{(l-1)_{-2}l}^{(l+1)} + \cdots + (-1)^{l+(l-1)_{-1}}z^{l}M_{(l-1)_{-1}l}^{(l+1)})\\
&= \sum_{j=0}^{l}(-1)^{l+j}M_{jl}^{(l+1)}\chi^{(j)}(z)\\
&= \det(g^{[l]}(t))\varphi_1^{(l)}(z,t)\\
&= \tau^{(l)}(t)\varphi_1^{(l)}(z,t).
\end{aligned}$$

□

Usando la versión adecuada del lema 4.78 intercambiando el papel de filas y columnas obtenemos la representación de los polinomios de Laurent $\varphi_2^{(l)}$ y sus asociados

Teorema 5.65. *Para cualquier $l \geq |\vec{n}|$ los polinomios de Laurent duales φ_2 tienen las siguientes expresiones en términos de las funciones τ*

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_2^{(l)}(z,t)} &= \tilde{S}_{ll}^{-1}\overline{\varphi_{2,+1}^{(l)}(z,t)} = \overline{\varphi_{2,-1}^{(l)}(z,t)} = \bar{z}^{\nu_+(l)-1}\frac{\tau^{(l)}(t+[\bar{z}^{-1}]_2)}{\tau^{(l+1)}(t)}, \quad a(l)=1,\\
\overline{\varphi_2^{(l)}(z,t)} &= \tilde{S}_{ll}^{-1}\overline{\varphi_{2,+2}^{(l)}(z,t)} = \overline{\varphi_{2,-2}^{(l)}(z,t)} = \bar{z}^{-\nu_-(l)}\frac{\tau^{(l)}(t-[\bar{z}]_1)}{\tau^{(l+1)}(t)}, \quad a(l)=2,
\end{aligned}$$

los polinomios etiquetados con "+" se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_{2,+2}^{(l)}(z,t)} &= \bar{z}^{-\nu_-(l_{+2})}\frac{\tau^{(l)}(t-[\bar{z}]_1)}{\tau^{(l)}(t)}, \quad a(l)=1,\\
\overline{\varphi_{2,+1}^{(l)}(z,t)} &= \bar{z}^{\nu_+(l_{+1})-1}\frac{\tau^{(l)}(t+[\bar{z}^{-1}]_2)}{\tau^{(l)}(t)}, \quad a(l)=2,
\end{aligned}$$

para concluir, los polinomios etiquetados con "−" tienen la siguiente representación

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_{2,-2}^{(l)}(z,t)} &= \bar{z}^{\nu_+(l)-1}\frac{\tilde{\tau}_{-2}^{(l)}(t+[\bar{z}^{-1}]_2)}{\tau^{(l+1)}(t)}, \quad a(l)=1,\\
\overline{\varphi_{2,-1}^{(l)}(z,t)} &= \bar{z}^{-\nu_-(l)}\frac{\tilde{\tau}_{-1}^{(l)}(t-[\bar{z}]_1)}{\tau^{(l+1)}(t)}, \quad a(l)=2.
\end{aligned}$$

Terminamos esta sección con la representación en términos de funciones τ de las funciones de segunda especie

Teorema 5.66. *Sea μ una medida positiva soportada en $\mathbb{T}$, en ese caso las siguientes afirmaciones son ciertas*

1. *Las funciones de segunda especie tienen la siguiente representación en forma de funciones* τ

$$
\begin{aligned}
\overline{C_1^{(l)}(z,t)} &= \bar{z}^{-\nu_+(l_{+1})}\frac{\tau_{+1}^{(l+1)}(t+[\bar{z}^{-1}]_1)}{\tau^{(l+1)}(t)}, && R_- <|z|,\\
\overline{C_2^{(l)}(z,t)} &= \bar{z}^{\nu_-(l_{+2})-1}\frac{\tau_{+2}^{(l+1)}(t-[\bar{z}]_2)}{\tau^{(l+1)}(t)}, && |z|<R_+,\\
\overline{C^{(l)}(z,t)} &= \frac{\bar{z}^{-\nu_+(l_{+1})}\tau_{+1}^{(l+1)}(t+[\bar{z}^{-1}]_1)+\bar{z}^{\nu_-(l_{+2})-1}\tau_{+2}^{(l+1)}(t-[\bar{z}]_2)}{\tau^{(l+1)}(t)}, && R_- <|z|<R_+.
\end{aligned}
\tag{5.177}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_1^{(l)}(z,t) &= z^{-\nu_+(l_{+1})}\frac{\tilde{\tau}_{+1}^{(l+1)}(t-[z^{-1}]_2)}{\tau^{(l)}(t)}, && R_+^{-1} <|z|,\\
\tilde{C}_2^{(l)}(z,t) &= z^{\nu_-(l_{+2})-1}\frac{\tilde{\tau}_{+2}^{(l+1)}(t+[z]_1)}{\tau^{(l)}(t)}, && |z|<R_-^{-1}\\
\tilde{C}^{(l)}(z,t) &= \frac{z^{-\nu_+(l_{+1})}\tilde{\tau}_{+1}^{(l+1)}(t-[z^{-1}]_2)+z^{\nu_-(l_{+2})-1}\tilde{\tau}_{+2}^{(l+1)}(t+[z]_1)}{\tau^{(l)}(t)}, && R_+^{-1} <|z|<R_-^{-1}.
\end{aligned}
\tag{5.178}
$$

2. *Para* $R_- < |z| < R_+$ *la serie de Fourier de la medida se puede expresar en términos de las funciones* τ *del siguiente modo*

$$
\begin{aligned}
F_{\mu(t)}(z) &= \frac{\tilde{\tau}_{+1}^{(l+1)}(t-[z]_2)+z^{-\nu_+(l_{+1})-\nu_-(l_{+2})+1}\tilde{\tau}_{+2}^{(l+1)}(t+[z^{-1}]_1)}{2\pi\tau^{(l)}(t-[z^{-1}]_1)}\\
&= \frac{\tau_{+1}^{(l+1)}(t+[z^{-1}]_1)+z^{\nu_+(l_{+1})+\nu_-(l_{+2})-1}\tau_{+2}^{(l+1)}(t-[z]_2)}{2\pi\tau^{(l)}(t+[z]_2)}, \quad a(l)=1,\\
F_{\mu(t)}(z) &= \frac{z^{\nu_+(l_{+1})+\nu_-(l_{+2})-1}\tilde{\tau}_{+1}^{(l+1)}(t-[z]_2)+\tilde{\tau}_{+2}^{(l+1)}(t+[z^{-1}]_1)}{2\pi\tau^{(l)}(t+[z]_2)}\\
&= \frac{z^{1-\nu_+(l_{+1})-\nu_-(l_{+2})}\tau_{+1}^{(l+1)}(t+[z^{-1}]_1)+\tau_{+2}^{(l+1)}(t-[z]_2)}{2\pi\tau^{(l)}(t-[z^{-1}]_1)}, \quad a(l)=2,
\end{aligned}
\tag{5.179}
$$

Demostración. Probaremos (5.178) solamente, y la prueba para (5.177) que es análoga se deja para la comprobación del lector. La expresión de la proposición 5.8 se puede organizar usando las columnas truncadas de la matriz de momentos, es decir $c_j^{[l]} := \int_{\mathbb{T}} \chi^{[l]}(\chi^{(l)})^\dagger d\mu(t)$. Usando esta notación

$$
\begin{aligned}
g^{[l]}(t)\tilde{C}_1^{(l)}(z,t) = \tau^{(l)}(t)\tilde{C}_1^{(l)}(z,t) &= c_0^{[l]}\wedge c_1^{[l]}\wedge\cdots\wedge c_{l-1}^{[l]}\wedge\sum_{j=l}^{\infty} c_j^{[l]}(\chi_1^*)^{(j)}\\
&= c_0^{[l]}\wedge c_1^{[l]}\wedge\cdots\wedge c_{l-1}^{[l]}\wedge\sum_{j=l_{+1}}^{\infty} z^{-\nu_+(j)}c_j^{[l]}\delta_{a(j),1}.
\end{aligned}
$$

Si definimos $\mathbb{Z}_{+,i} := \{j \in \mathbb{Z}_+, a(j) = i\}$, $i = 1, 2$ y advertimos que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_{+,1} \cup \mathbb{Z}_{+,2}$. Las restricciones $\nu_+|_{\mathbb{Z}_{+,1}}, \nu_-|_{\mathbb{Z}_{+,2}}$ de las aplicaciones $\nu_+, \nu_- : \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{N}$ son biyecciones; por lo tanto tienen una inversa bien definida, $(\nu_+)^{-1}$ y $(\nu_-)^{-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\tau^{(l)}(t)\tilde{C}_1^{(l)}(z,t) &= c_0^{[l]}\wedge c_1^{[l]}\wedge\cdots\wedge c_{l-1}^{[l]}\wedge z^{-\nu_+(l_{+1})}\sum_{j=0}^{\infty} z^{-j}c^{[l]}_{(\nu_+)^{-1}(\nu_+(l_{+1}+j))}\\ &= z^{-\nu_+(l_{+1})}c_0^{[l]}\wedge c_1^{[l]}\wedge\cdots\wedge c_{l-1}^{[l]}\wedge\sum_{j=0}^{\infty} z^{-j}c^{[l]}_{(\nu_+)^{-1}(\nu_+(l_{+1}+j))}\\ &= z^{-\nu_+(l_{+1})}\tilde{\tau}_{+1}^{(l+1)}(t-[z^{-1}]_2),\end{aligned}$$

donde el último paso requiere el empleo del lema 4.81 con $c_0^{[l]}, c_1^{[l]}, \dots, c_{l-1}^{[l]}, c_{l_{+1}}^{[l]}$. Procediendo de forma similar, tenemos que

$$\begin{aligned}\det(g^{[l]}(t))\tilde{C}_2^{(l)}(z,t) = \tau^{(l)}(t)\tilde{C}_2^{(l)}(z,t) &= c_0^{[l]}\wedge c_1^{[l]}\wedge\cdots\wedge c_{l-1}^{[l]}\wedge\sum_{j=l}^{\infty} c_j^{[l]}\chi_2^{(j)}\\ &= c_0^{[l]}\wedge c_1^{[l]}\wedge\cdots\wedge c_{l-1}^{[l]}\wedge\sum_{j=l_{+2}}^{\infty} z^{\nu(j)-1}c_j^{[l]}\delta_{a(j),2}\\ &= c_0^{[l]}\wedge c_1^{[l]}\wedge\cdots\wedge c_{l-1}^{[l]}\wedge z^{\nu(l_{+2})-1}\sum_{j=0}^{\infty} z^{j}c^{[l]}_{(\nu_-)^{-1}(\nu_-(l_{+2}+j))}\\ &= z^{\nu_-(l_{+2})-1}c_0^{[l]}\wedge c_1^{[l]}\wedge\cdots\wedge c_{l-1}^{[l]}\wedge\sum_{j=0}^{\infty} z^{j}c^{[l]}_{(\nu_-)^{-1}(\nu_-(l_{+2}+j))}\\ &= z^{\nu_-(l_{+2})}\tilde{\tau}_{+2}^{(l+1)}(t+[z]_1).\end{aligned}$$

con $c_0^{[l]}, c_1^{[1]}, \dots, c_{l-1}^{[l+2]}$ como entradas adecuadas para el lema 4.81. Finalmente (5.179) se obtienen combinando las ecuaciones (5.177) y (5.178) con la proposición 5.10, el teorema 5.64 y el teorema 5.65. □

Es necesario hacer un comentario sobre la convergencia de las expresiones que aparecen en el teorema 5.66 y su demostración. La técnica empleada en la demostración es el desarrollo en serie de potencias de la expresión $(1-z)^{-1}$, que es convergente si y solo si $|z|<1$ pero que puede prolongarse analíticamente fuera de $\mathbb{T}$. Por ejemplo, la expresión en términos de funciones τ para $C_{2,1}^{(l)}$ es válida estrictamente fuera de $\mathbb{T}$. Sin embargo puede ser prolongada analíticamente dentro del círculo hasta R_- que es donde converge la serie para $C_{2,1}$. Como esta extensión es única, podemos hablar de las funciones τ prolongadas analíticamente bajo las traslaciones de Miwa. Lo mismo se puede decir de las demás igualdades que involucran funciones τ; son correctas formalmente y convergen bien fuera o bien dentro de $\mathbb{T}$, pero las funciones τ "trasladadas Miwa" poseen una prolongación analítica que converge donde lo hacen las transformadas de Cauchy.

La diferencia entre las expresiones para las transformadas de Cauchy (5.177) y (5.178) y sus equivalentes en la recta (por ejemplo [7],[9]) se debe a la existencia de una parte con potencias positivas y una parte con potencias negativas en el desarrollo de Laurent alrededor de $z=0$. El desarrollo de $(1-z)^{-1}$ genera una parte con potencias positivas y el desarrollo de $(1-z^{-1})^{-1}$ genera una contribución con potencias negativas que constituye la parte singular de los desarrollos de Laurent.

Para la derivación de la identidad bilineal en este caso procedemos de forma similar a como hicimos en el capítulo 4 empleando los mismos lemas e idéntica demostración

Teorema 5.67. *Para cualquier t, t'*

1. *Las funciones de ondas satisfacen*

$$\operatorname{Res}_{z=0}\Big(\Psi(z,t)(\Psi^*(\bar z,t'))^\dagger\Big) = \operatorname{Res}_{z=0}\Big(\tilde\Psi(z,t)(\tilde\Psi^*(\bar z,t'))^\dagger\Big)$$

2. *Los OLPUC satisfacen*

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=0}&\Big(\varphi_1^{(k)}(z,t)\overline{\varphi_2^{(l)}(z^{-1},t')}z^{-1}F_{\mu(t')}(z)\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^\infty (t_j-t'_j)z^j}\Big)\\ &= \operatorname{Res}_{z=0}\Big(\varphi_1^{(k)}(z^{-1},t)\overline{\varphi_2^{(l)}(z,t')}z^{-1}F_{\mu(t')}(z)\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^\infty (\tilde t_j-\tilde t'_j)z^j}\Big), \end{aligned}\qquad (5.180)$$

Corolario 5.68. *Si $R_-=0$ y consideramos una curva γ_0 que rodee el origen podemos aplicar el teorema de los residuos*

$$\oint_{\gamma_0}\Psi^{(n)}(z,t)\overline{(\Psi^*)^{(m)}(\bar z,t')}dz = \oint_{\gamma_0}\tilde\Psi^{(n)}(z,t)\overline{(\tilde\Psi^*)^{(m)}(\bar z,t')}dz, \qquad (5.181)$$

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_0}&\varphi_1^{(k)}(z,t)\overline{\varphi_2^{(l)}(z^{-1},t')}\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^\infty (t_j-t'_j)z^j}\,z^{-1}F_{\mu(t')}(z)dz\\ &=\oint_{\gamma_0}\varphi_1^{(k)}(z^{-1},t)\overline{\varphi_2^{(l)}(z,t')}\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^\infty (\tilde t_j-\tilde t'_j)z^j}\,z^{-1}F_{\mu(t)}(z)dz,\end{aligned}$$

Alternativamente la ecuación bilineal se puede expresar usando funciones τ

$$\begin{aligned}&\oint_{\gamma_0}\tau_{+1}^{(l)}(t-[z^{-1}]_1)\Big(\tau_{+1}^{(l+1)}(t+[z^{-1}]_1)+z^{\nu_+(l_{+1})+\nu_-(l_{+2})-1}\tau_{+2}^{(l+1)}(t-[z]_2)\Big)\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^\infty (t_j-t'_j)z^j}\,\frac{dz}{z}\\ &=\oint_{\gamma_0}\tilde\tau_{+1}^{(l)}(t+[z^{-1}]_2)\Big(\tilde\tau_{+1}^{(l+1)}(t-[z^{-1}]_2)+z^{\nu_+(l_{+1})+\nu_-(l_{+2})-1}\tilde\tau_{+2}^{(l+1)}(t+[z]_1)\Big)\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^\infty (\tilde t_j-\tilde t'_j)z^j}\,\frac{dz}{z},\end{aligned}$$

si a(l)=1 y

$$\begin{aligned}&\oint_{\gamma_0}\tau_{+2}^{(l)}(t+[z]_2)\Big(z^{-\nu_+(l_{+1})-\nu_-(l_{+2})+1}\tau_{+1}^{(l+1)}(t+[z^{-1}]_1)+\tau_{+2}^{(l+1)}(t-[z]_2)\Big)\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^\infty (t_j-t'_j)z^j}\,\frac{dz}{z}\\ &=\oint_{\gamma_0}\tilde\tau_{+2}^{(l)}(t-[z]_1)\Big(z^{-\nu_+(l_{+1})-\nu_-(l_{+2})+1}\tilde\tau_{+1}^{(l+1)}(t-[z^{-1}]_2)+\tilde\tau_{+2}^{(l+1)}(t+[z]_1)\Big)\,\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^\infty (\tilde t_j-\tilde t'_j)z^j}\,\frac{dz}{z},\end{aligned}$$

si a(l)=2.

Conclusiones y problemas abiertos

Tras la realización de esta tesis hemos concluido que el empleo de técnicas de factorización para la búsqueda de relaciones entre las jerarquías integrables de tipo Toda y los polinomios ortogonales y múltiplemente ortogonales ha sido fructífero por las siguientes razones. Aunque las enumeramos por separado, todas se encuentran relacionadas.

- El planteamiento de un problema de factorización es común a las dos situaciones, tanto en el tratamiento de sistemas integrables como en el planteamiento de sistemas de polinomios ortogonales y múltiplemente ortogonales. En el caso de los polinomios, la llamada matriz de momentos es uno de los posibles puntos de partida a la hora de estudiar el problema. De forma similar, dentro de las formulaciones posibles de la integrabilidad, la deducción de las ecuaciones que caracterizan a un sistema integrable a través de un problema de factorización resulta especialmente útil para nuestros propósitos.

- El empleo de problemas de factorización LU para caracterizar un sistema integrable ha resultado útil también para el estudio de las simetrías presentes en el sistema. De hecho las simetrías Toeplitz/Hankel presentes en algunas reducciones de Toda han sido el punto de partida para establecer la conexión de las soluciones de dicha jerarquía con la teoría de polinomios ortogonales. Abundando en dicha idea, hemos comprobado que la generalización de la simetría Hankel de los polinomios ortogonales clásicos conduce a situaciones más generales que no se habían abordado desde nuestro punto de vista, como el de los polinomios múltiplemente ortogonales o el de los polinomios de Laurent en el círculo. En particular, en esos problemas la consideración de simetrías generalizadas para la matriz de momentos ha resultado ser una herramienta fundamental para la construcción directa de fórmulas de tipo Christoffel-Darboux.

- El camino seguido ha servido para utilizar una metodología consistente a lo largo de toda la Tesis que ha consistido en partir de la factorización LU de la matriz de momentos de una familia de polinomios ortogonales y a partir de ella plantear una evolución temporal consistente con las jerarquías de tipo Toda. Esto permite dotar a las familias de polinomios ortogonales de una estructura integrable natural y que hubiera sido difícil de obtener por otros métodos.

- El estudio de las conexiones entre las jerarquías de tipo Toda multicomponente y los polinomios ortogonales (y sus generalizaciones) ha tenido un enfoque predominantemente algebraico. Por ello, el estudio de las simetrías presentes en la matriz de momentos, las relaciones de recurrencia, o el cálculo de fórmulas de Christoffel-Darboux han sido los problemas centrales. Es un problema abierto el investigar la aplicación de las técnicas de factorización LU a problemas de corte marcadamente analítico, como es el caso del análisis de los ceros de los polinomios ortogonales o de su comportamiento asintótico.

- Como segundo problema abierto, podemos destacar la extensión de las técnicas empleadas al estudio de polinomios de más de una variable, donde se pueden hacer diversas ordenaciones de los momentos que podrían dar lugar a diversos tipos de factorización.

Bibliografía

[1] M. J. Ablowitz and J. F. Ladik, *Nonlinear differential-difference equations.* Journal of Mathematical Physics **16** (1975), 598-603.

[2] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, *Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis.* Journal of Mathematical Physics **17** (1976), 1011-1018.

[3] M. Adler, P. van Moerbeke, *Group factorization, moment matrices and Toda lattices*, International Mathematics Research Notices **12** (1997), 556-572.

[4] M. Adler, P. van Moerbeke, *Generalized orthogonal polynomials, discrete KP and Riemann-Hilbert problems*, Communications in Mathematical Physics **207** (1999), 589-620.

[5] M. Adler, P. van Moerbeke, *Darboux transforms on band matrices, weights and associated polynomials*, International Mathematics Research Notices **18** (2001), 935-984.

[6] M. Adler, P. van Moerbecke, *Integrals over classical groups, random permutations, Toda and Toeplitz lattices* Communications on Pure and Applied Mathematics **54** (2001), 153-205.

[7] M. Adler, P. van Moerbeke, P. Vanhaecke, *Moment matrices and multi-component KP, with applications to random matrix theory*, Communications in Mathematical Physics **286** (2009), 1-38.

[8] C. Álvarez-Fernández, U. Fidalgo and M. Mañas, *The multicomponent 2D Toda hierarchy: generalized matrix orthogonal polynomials, multiple orthogonal polynomials and Riemann-Hilbert problems*, Inverse Problems **26** (2010), 055009 (17 pp.)

[9] C. Álvarez-Fernández, U. Fidalgo, M. Mañas, *Multiple orthogonal polynomials of mixed type: Gauss-Borel factorization and the multi-component 2D Toda hierarchy*, Advances in Mathematics **227** (2011), 1451-1525.

[10] C. Álvarez-Fernández, M. Mañas, *Orthogonal Laurent polynomials on the unit circle, extended CMV ordering and 2D Toda type integrable hierarchies*, Advances in Mathematics **240** (2013), 132-193.

[11] C. Álvarez-Fernández, M. Mañas, *On the Christoffel-Darboux formula for generalized matrix orthogonal polynomials of multigraded-Hankel* arxiv:1311.0563v1 [math-CA].

[12] R. Álvarez-Nodarse, J.Arvesú, F. Marcellán, *Modifications of quasi-definite linear functionals via addition of delta and derivatives of delta Dirac functions*, Indagationes Mathematicae, **15** (2004), 1-20.

[13] M. Ambroladze, *On exceptional sets of asymptotics relations for general orthogonal polynomials*, Journal of Approximation Theory **82** (1995), 257-273.

[14] R. Apery. *Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astèrisque **61** (1979), 11-13.

[15] W. Van Assche, J. S. Geromino, A. B. J. Kuijlaars, *Riemann-Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials* in: Bustoz et al (eds.), Special Functions 2000: Current Perspectives and Future Directions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2001), 23-59.

[16] W. Van Assche, K. T-R Mc Laughlin, A. B. J. Kuijlaars, M. Vanlessen, *The Riemann-Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on [-1,1]*, Advances in Mathematics **188** (2004), 337.

[17] D. Barrios Rolanía, A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, *Dynamics and interpretation of some integrable systems via multiple orthogonal polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **361** (2010), 358-370.

[18] D. Barrios Rolanía, A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, *On the relation between the full Konstant-Toda lattice and multiple orthogonal polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **377** (2010), 228-238.

[19] D. Barrios Rolanía, A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, *On the full Konstant-Toda system and the discrete Korteweg-de Vries equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **401** (2013), 811-820.

[20] D. Barrios, G. López, *Ratio asymptotics for orthogonal polynomials on arcs of the unit circle*, Constructive Approximation **15** (1999), 1-31.

[21] M. J. Bergvelt, A. P. E. ten Kroode, *Partitions, vertex operators constructions and multi-component KP equations*, Pacific Journal of Mathematics. **171** (1995), 23-88.

[22] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, J. Garcia-Amor, *Connection between orthogonal polynomials on the unit circle and bounded interval*, Journal of Computational and Applied Mathematics **177** (2005), 205-223.

[23] M. Bertola, M. Gekhtman, *Biorthogonal Laurent polynomials, Toeplitz determinants, minimal Toda orbits and isomonodromic tau functions*, Constructive Approximation **26** (2007), 383-430.

[24] F. Beukers, *Padé approximation in number theory,* Lecture Notes in Mathematics **888**, Springer Verlag, Berlin (1981), 90-99.

[25] P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars, *Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials*, International Mathematics Research Notices (2004), 109-129.

[26] A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O.Njåstad, *Orthogonal rational functions*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, vol.5, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[27] A. Cachafeiro, F. Marcellán, C. Pérez, *Lebesgue perturbation of a quasi-definite Hermitian functional. The positive definite case*, Linear Algebra and its Applications **369** (2003), 235-250.

[28] M. Cafasso, *Matrix Biorthogonal Polynomials on the unit circle and the non-Abelian Ablowitz-Ladik hierarchy*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **42** (2009), 365211.

[29] M.J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle* Linear Algebra and its Applications **362** (2003), 29-56.

[30] G. Carlet, *The extended bigraded Toda hierarchy*, Journal of Physics A: Mathematical and General **39** (2006), 9411-9435.

[31] T. Chihara *An introduction to orthogonal polynomials*, Dover, New York (2011).

[32] J. Coates, *On the algebraic approximation of functions*, I, II, III. Indagationes Mathematicae **28** (1966) 421-461.

[33] L. Cochran, S.C. Cooper, *Orthogonal Laurent polynomials on the real line*, S.C. Cooper, W.J. Thron (Eds.), Continued Fractions and Orthogonal Functions, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series, **154**, Marcel Dekker, NewYork, 1994, p. 47100.

[34] R. Cruz-Barroso, L. Daruis, Pablo González-Vera, O. Njåstadb, *Sequences of orthogonal Laurent polynomials, bi-orthogonality and quadrature formulas on the unit circle*, Journal of Computational and Applied Mathematics **200** (2007), 424-440.

[35] R. Cruz-Barroso, S. Delvaux *Orthogonal Laurent polynomials on the unit circle and snake-shaped matrix factorizations* Journal of Approximation Theory **161** (2009), 65-87.

[36] R. Cruz-Barroso, P. González-Vera, *A Christoffel-Darboux formula and a Favard's theorem for Laurent orthogonal polynomials on the unit circle*, Journal of Computational and Applied Mathematics **179** (2005) ,157-173.

[37] E. Daems and A. B. J. Kuijlaars, *A Christoffel-Darboux formula for multiple orthogonal polynomials*, Journal of Approximation Theory **130** (2004), 188-200.

[38] E. Daems and A. B. J. Kuijlaars, *Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions*, Journal of Approximation Theory **146** (2007), 91-114.

[39] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Operator approach to the Kadomtsev-Petviashvili equation. Transformation groups for soliton equations. III.*, Journal of the Physical Society of Japan **50** (1981), 3806-3812.

[40] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **18** (1982) 1077-1110.

[41] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations* in *Nonlinear Integrable Systems-Classical Theory and Quantum Theory* M. Jimbo and T. Miwa (eds.) World Scientific, Singapore (1983), 39-120.

[42] C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera, M. Jiménez-Paiz, *Strong Stieltjes distributions and orthogonal Laurent polynomials with applications to quadratures and Padé approximation*, Mathematics of Computation **74** (2005), 1843-1870.

[43] A. Durán and F. A. Grünbaum, *A survey on orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations*, Journal of Comptational and Applied Mathematics **178** (2005), 169-190.

[44] J. Favard, *Sur les polynomes de Tchebicheff*, Comptes Rendus de l'Académie des sciences, **200** (1935), 2052-2053.

[45] L. Faybusovich, M. Gekhtman, *On Schur flows*, Journal of Physics A: Mathematical and General **32** (1999), 4671-4680.

[46] L. Faybusovich, M. Gekhtman *Elementary Toda orbits and integrable lattices*, Journal of Mathematical Physics **41** (2000), 2905-2921.

[47] L. Faybusovich, M. Gekhtman, *Inverse moment problem for elementary co-adjoint orbits*, Inverse Problems **17** (2001), 1295-1306.

[48] R. Felipe, F. Ongay, *Algebraic aspects of the discrete KP hierarchy*, Linear Algebra and its Applications **338** (2001), 1-17.

[49] H. Flaschka, *The Toda lattice. I.Existence of Integrals*, Physical Review B **9** (1974), 1924.

[50] H. Flaschka, *On the Toda lattice. II* Progress of Theoretical and Experimental Physics **51** (1974), 703-716.

[51] E. Fermi, J. Pasta y S. Ulam, *Collected Papers of Enrico Fermi Vol II* University of Chicago Press (1965), 978.

[52] U. Fidalgo Prieto, G. López Lagomasino, *Nikishin systems are perfect*, Constructive Approximation **34** (2011), 297-356.

[53] A. S. Fokas, A. R. Its, A. V. Kitaev, *The isomonodromy approach to matrix models in 2D quatum gravity*, Communications in Mathematical Physics **147** (1992), 395-430.

[54] P. di Francesco, P. Ginsparg, Z. Zinn-Justin, Physics Reports **254** (1995), 1.

[55] G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Akadémiai Kiadó, Budapest and Pergamon Press, Oxford, 1971, 1985.

[56] F.D. Gakhov. *Boundary Value Problems*, Pergamon Press, New York, (1966). Redited by Dover (1990).

[57] P. García, F. Marcellán, *On zeros of regular orthogonal polynomials on the unit circle*, Annales Polonici Mathematici **58** (1993), 287-298.

[58] C. S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R. M. Miura *Method for solving the Korteweg-de Vries equation* Physical Review Letters **19** (1967), 1095.

[59] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials:computation and approximation*, Oxford University Press, New York (2004).

[60] I.M. Gelfand, L.A. Dickey *Fractional powers of operators and Hamiltonian systems* Functional Analysis and its Applications **10** (1976), 259.

[61] Ya. L. Geronimus, *Polynomials orthogonal on a circle and their applications, Series and Approximations*, Amer. Math. Soc. Transl., serie 1, vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1962), 1-78.

[62] E. Godoy, F. Marcellán, *Orthogonal polynomials on the unit circle: distribution of zeros*, Journal of Computational and Applied Mathematics **37** (1991), 195-208.

[63] L. Golinskii, *Schur flows and orthogonal polynomials on the unit circle*, (2006) Sbornik: Mathematics **197** 1145.

[64] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, third ed., The John Hopkins University Press, Baltimore, CA, 1996.

[65] H. Hamburger *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems* Mathematische Annalen **81** (1920), 235-319; **82** (1921), 120-164; 168-187.

[66] M. Hénon, *Integrals of the Toda lattice* Physical Review B **9** (1974), 1921.

[67] Ch. Hermite, *Sur la fonction exponentielle*, Comptes Rendus de l'Acadèmie des Sciences, Paris **77** (1873), 18-24, 74-79, 226-233, 285-293; reprinted in his Oeuvres, Tome III, Gauthier-Villars, Paris, 1912, 150-181.

[68] R. Hirota, *Exact solutions of the KdV equation for multiple collisions of solitons*, Physical Review Letters **27** (1971) 1192-94.

[69] C. Jacobi *Vorlesungen über Dynamik*, Gesammelte Werke, Supplement band, Berlin, (1884).

[70] H. Jager, *A simultaneous generalization of the Padé table, I-VI*, Indagationes Mathematicae **26** (1964), 193-249.

[71] W. B. Jones, O. Njåstad, *Applications of Szegő polynomials to digital signal processing*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **21** (1991), 387-436.

[72] W. B. Jones, O. Njåstad,W.J. Thron, *Two-point Pade expansions for a family of analytic functions*, Journal of Computational and Applied Mathematics **9** (1983), 105-123.

[73] W.B. Jones, O. Njåstad, W. J. Thron, H. Waadeland, *Szegő polynomials applied to frequency analysis*, Journal of Computational and Applied Mathematics **46** (1993), 217-228.

[74] W. B. Jones, W.J. Thron, *Orthogonal Laurent polynomials and Gaussian quadrature*, in: K.E. Gustafson, W.P. Reinhardt (Eds.), Quantum Mechanics in Mathematics Chemistry and Physics, Plenum, NewYork, 1981, pp. 449-455.

[75] W. B. Jones,W.J. Thron, H.Waadeland, *A strong stieltjes moment problem*, Transactions of the American Mathematical Society 261 (1980), 503-528.

[76] V. G. Kac and J. W. van de Leur, *The n-component KP hierarchy and representation theory*, Journal of Mathematical Physics **44** (2003), 3245-3293.

[77] D. J. Korteweg, F. de Vries, *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves.* Philosphical Magazine **39** (1895), 422-443.

[78] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili, *On the stability of solitary waves in weakly dispersive media* , Doklady Physics **15** (1970), 539-541.

[79] R. Killip and I. Nenciu, *CMV: The unitary analogue of Jacobi matrices*, Communications in Pure and Applied Mathematics **60** (2006), 1148-1188.

[80] A. B. J. Kuijlaars, *Multiple orthogonal polynomial ensembles*, `arXiv:0902.1058v1 [math.PR]` (2009).

[81] J.L. Lagrange *Mécanique analytique* (1788), en *Oeuvres de Lagrange **XII***, Gauthier-Villars, Paris, (1889).

[82] P.D. Lax *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves* Communications in Pure and Applied Mathematics **21** (1968), 467.

[83] J. Liouville *Notes sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique.* Journal de Mathematiques **XX** (1855), 137.

[84] K. Mahler, *Perfect systems*, Compositio Mathematica **19** (1968), 95-166.

[85] M. Mañas, L. Martínez Alonso, and E. Medina, *Dressing methods for geometric nets: I. Conjugate nets* Journal of Physics A: Mathematical and General **33** (2000), 2871.

[86] M. Mañas, L. Martínez Alonso, and E. Medina, *Dressing methods for geometric nets: II. Orthogonal and Egorov nets* Journal of Physics A: Mathematical and General **33** (2000), 7181.

[87] M. Mañas, L. Martínez Alonso and C. Álvarez-Fernández, *The multicomponent 2D Toda hierarchy: discrete flows and string equations*, Inverse Problems **25** (2009), 065007 (31 pp).

[88] M. Mañas and L. Martínez Alonso, *The multicomponent 2D Toda hierarchy: dispersionless limit*, Inverse Problems **25** (2009), 115020 (22 pp).

[89] F. Marcellan, J. Hernandez *Geronimus spectral transforms and measures on the complex plane*, Journal of Computational and Applied Mathematics **219** (2008), 441-456.

[90] L. Martínez Alonso and E. Medina, *Multiple orthogonal polynomials, string equations and the large-n limit* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **42** (2009), 205204.

[91] H. N. Mhaskar, E.B. Saff, *On the distribution of zeros of polynomials orthogonal on the unit circle*, Journal of Approximation Theory **63** (1990), 30-38.

[92] A. Mukaihira, Y. Nakamura, *Schur flow for orthogonal polynomials on the unit circle and its integrable discretization*, Journal of Computational and Applied Mathematics **139** (2002), 75-94.

[93] M. Mulase, *Complete integrability of the Kadomtsev-Petviashvili equation*, Advances in Mathematics **54** (1984), 57-66.

[94] I. Nenciu, *Lax pairs for the Ablowitz-Ladik system via orthogonal polynomials on the unit circle.* International Mathematics Research Notes **11** (2005), 647-686.

[95] E. M. Nikishin, *On simultaneous Padé approximants* Matem. Sb. **113** (1980), 499-519 (Russian); English translation in Math. USSR Sb. **41** (1982), 409-425.

[96] O. Njåstad, W. J. Thron, *The theory of sequences of orthogonal L-polynomials*, in: H. Waadeland, H. Wallin (Eds.), Pade Approximants and Continued Fractions, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter, 1983, pp. 54-91.

[97] P. Nevai, V. Totik, *Orthogonal polynomials and their zeros*, Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged **53** (1-2) (1989) 99-104.

[98] K. Pan, *Asymptotics for Szegő polynomials associated with Wiener-Levinson filters*, Journal of Computational and Applied Mathematics **46** (1993), 387-394.

[99] K. Pan, E. B. Saff, *Asymptotics for zeros of Szegő polynomials associated with trigonometric polynomials signals*, Journal of Approximation Theory **71** (1992), 239-251.

[100] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Quatrième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm, (1916), 27-44.

[101] M. Riesz, *Sur le problème des moments. Troisième Note, Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, **17** (1923), 52 pp.

[102] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (International Series in Pure and Applied Mathematics) McGraw Hill (1986).

[103] J. S. Russell, *Report on waves* , 14th Mtg. of the British Assoc. for the Advance of Science, John Murray, London, (1844) pp. 311.

[104] M. Sato, *Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds*, Research Institute for Mathematical Sciences Kokyuroku **439** (1981), 30-46.

[105] J. A. Shohat and J.D. Tamarkin, *The problem of moments*, American Mathematical Society (1943).

[106] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory*, AMS Colloquium Series, American Mathematical Society, Providence, RI, (2005).

[107] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 2: Spectral Theory*, AMS Colloquium Series, American Mathematical Society, Providence, RI, (2005).

[108] B. Simon, *CMV matrices: Five years after*, Journal of Computational and Applied Mathematics **208** (2007), 120-154.

[109] B. Simon *Zeros of OPUC and long time asymptotics of Schur and related flows*, Inverse Problems and Imaging **1** (2007), 189-215.

[110] B. Simon, *The Christoffel-Darboux Kernel*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **79**:"Perspectives in Partial Differential Equations, Harmonic Analysis and Applications: A Volume in Honor of Vladimir G. Maz'ya's 70th Birthday", (2008), 295-336. `arXiv:0806.1528`

[111] B. Simon *Szegő's Theorem and its descendants*, Princeton Univertity Press, Princeton, New Jersey (2011).

[112] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[113] T.J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **8** (1894), J1-122.

[114] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1975).

[115] P. L. Tchebichev *Sur les valeurs limites des intégrales*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **19** (1874) 157-160.

[116] W. J. Thron, *L-polynomials orthogonal on the unit circle*, in: A. Cuyt (Ed.), Nonlinear Methods and Rational Approximation, Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1988), 271-278.

[117] M. Toda, *Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction.* Journal of the Physical Society of Japan **22** (1967), 431.

[118] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, in Group Representations and Systems of Differential Equations, Advances Studies in Pure Mathematics **4** (1984), 1-95.

[119] D.S. Watkins, *Some perspectives on the eigenvalue problem*, Society for Industrial and Applied Mathematics Review **35**, (1993) 430-471.

[120] V.E. Zaharov, A.B. Shabat, *Integration of Non Linear Equations of Mathematical Physics by the method of Inverse Scattering. II* Functional Analysis and its Applications **13** (1979), 166.